

## Durum Geri-beslemeli Denetleyici Tasarımı

### Bir Girişli sistemler ( $m = 1$ )

Yapılması gereken işler şunlardır:

1. Sistemin yönetilebilir olup olmadığını belirle
2. Sistem yönetilebilirse yönetilebilirlik matrisini bul
3. Yönetilebilirlik matrisinin tersi aracılığı ile sistem denklemlerini yönetilebilir kanonik yapıya getiren benzerlik dönüşümünü belirle
4. Kapalı çevrim sistem için kutupların nerelerde olması gerektiğini belirle ve buradan referans bir karakteristik polinom bul.
5. İlgili referans polinomu, kapalı çevrim sistemin karakteristik polinomu yapacak olan geri-besleme kuralını belirle

Elimizdeki sistem  $\dot{x} = Ax + Bu$  şeklinde olsun. Ayrıca  $(A, B)$  yönetilebilir olsun. Ayrıca kapalı çevrim sistem kutuplarının

$$\Delta_{cl}(s) = (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n) = \det[sI - A_{cl}] = \det[sI - (A+BK)]$$

noktalarında olması isteniyor olsun. Bu durumda

$$\Delta_{cl}(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0$$

şeklinde referans karakteristik polinomu elde edilir. Amacımız burada  $K$  kazanç vektörünü belirlemektir.

Sistemimize ait yönetilebilirlik matrisi

$$C = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

şeklinde olur ve bu matrisin rankı ilgili kabullenmelerden ötürü  $n$  dir.Yani tersi alınabilmektedir.

Bu matrisin tersini alırsak

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \star \\ \star \\ \vdots \\ q_1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olacaktır. Burada matrisin son satırına  $q_1$  diyelim. Diğer taraftan biliyoruz ki:  $C^{-1}C = I$  dir. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} \star \\ \star \\ \vdots \\ q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada son satırdan

$$q_1 B = 0$$

$$q_1 AB = 0$$

$$q_1 A^2 B = 0$$

$\vdots$

$$q_1 A^{n-1} B = 1$$

elde edilir. Yada

$$Q \triangleq \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1 A \\ q_1 A^2 \\ \vdots \\ q_1 A^{n-1} \end{bmatrix}$$

gösterimi altında

$$QB = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Benzerlik dönüşümü olarak  $x = Q^{-1}\tilde{x}$  yada  $\tilde{x} = Qx$  dönüşümünü kullanırsak

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} = Q \triangleq \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1 A \\ q_1 A^2 \\ \vdots \\ q_1 A^{n-1} \end{bmatrix} x$$

elde edilir. Buradaki ifadeleri açarsak

$$\dot{\tilde{x}}_1 = q_1 \dot{x} = q_1 (Ax + Bu) = q_1 Ax + \underbrace{q_1 Bu}_0 = q_1 Ax = \tilde{x}_2$$

$$\dot{\tilde{x}}_2 = q_1 A \dot{x} = q_1 A (Ax + Bu) = q_1 A^2 x + \underbrace{q_1 ABu}_0 = q_1 A^2 x = \tilde{x}_3$$

⋮

$$\dot{\tilde{x}}_{n-1} = q_1 A^{n-2} \dot{x} = q_1 A^{n-2} (Ax + Bu) = q_1 A^{n-1} x + \underbrace{q_1 A^{n-2} Bu}_0 = q_1 A^{n-1} x = \tilde{x}_n$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_n &= q_1 A^{n-1} \dot{x} = q_1 A^{n-1} (Ax + Bu) = \\ &= q_1 A^n x + \underbrace{q_1 A^{n-1} Bu}_1 = q_1 A^n x + u = q_1 A^n Q^{-1} \tilde{x} + u \end{aligned}$$

$$\dot{\tilde{x}}_n = q_1 A^n Q^{-1} \tilde{x} + u$$

$$\dot{\tilde{x}}_n = -\alpha_0 \tilde{x}_1 - \alpha_1 \tilde{x}_2 - \cdots - \alpha_{n-1} \tilde{x}_n + u$$

Bu durumda kapalı olarak benzer sistem

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A} \tilde{x} + \tilde{B} u$$

şeklini alır. Burada  $\tilde{A} = Q A Q^{-1}$ ,  $\tilde{B} = Q B$  şeklindedir. Burada

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kontrol kuralı  $u = -Kx + r$  şeklinde olduğundan ve  $x = Q^{-1} \tilde{x}$  olduğundan

$$u = -\underbrace{K Q^{-1}}_{\tilde{K}} \tilde{x} + r$$

yazılabilir.

Yeni koordinatlarda kapalı çevrim sisteminin durum denklemleri:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u \\ u &= -\tilde{K}\tilde{x} + r\end{aligned}$$

şeklindedir. Yada  $\dot{\tilde{x}} = \underbrace{(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K})}_{A_{cl}}\tilde{x} + \tilde{B}r$

$$\tilde{A}_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \cdots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\tilde{K}_1 \quad \tilde{K}_2 \quad \cdots \quad \tilde{K}_n]$$

$$\tilde{A}_{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\alpha_0 - \tilde{K}_1 & -\alpha_1 - \tilde{K}_2 & -\alpha_2 - \tilde{K}_3 & \cdots & -\alpha_{n-1} - \tilde{K}_n \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{cl}(s) = |sI - \tilde{A}_{cl}| = |sI - A_{cl}|$$

olmalıdır. Yani

$$s^n + (\alpha_{n-1} + \tilde{K}_n)s^{n-1} + \cdots + (\alpha_1 + \tilde{K}_2)s + (\alpha_0 + \tilde{K}_1) \stackrel{!}{=} s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$$

Buradan kolaylıkla

$$\tilde{K} = [a_0 - \alpha_0 \quad a_1 - \alpha_1 \quad \dots, a_{n-1} - \alpha_{n-1}]$$

elde edilir. Ancak bu katsayılar yeni koordinatlardadır. Orjinal koordinatlarda istenen kutup atamasını sağlayan kazanç değerleri

$$K = \tilde{K}Q = [a_0 - \alpha_0 \quad a_1 - \alpha_1 \quad \dots, a_{n-1} - \alpha_{n-1}] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1 A \\ \vdots \\ q_1 A^{n-1} \end{bmatrix}$$

şeklinde belirlenir.

**Örnek:** Durum denklemleri  $\dot{x} = Ax + Bu$  şeklinde olan sistem durum geri beslemesi ile kontrol edilecektir. İlgili sistemde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4.438 \\ 0 & -12 & -24 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

şeklinde ise kapalı çevrim sistemin kutuplarını (özdeğerlerini)  $-3 \pm j3$  ve  $-24$  noktalarına atayan  $u = -Kx + r$  kontrol geri-besleme kazançlarını bulunuz?

Açıktır ki kapalı çevrim sisteme ait karakteristik denklemin

$\Delta_{cl}(s) = (s + 3 + j3)(s + 3 - j3)(s + 24) = s^3 + 30s^2 + 162s + 432$  şeklinde olması istenmektedir. Öncelikle  $C$  yönetilebilirlik matrisi kurulmalı ve rankı sorgulanmalıdır.

$$C = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 88.76 \\ 0 & 88.76 & -2130.24 \\ 20 & -480 & 10454.88 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu matrisin rankı=3 olduğundan sistem yönetilebilirdir. Bu durumda  $C$  matrisinin tersi

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \star \\ \star \\ q_1 \end{bmatrix}$$

şeklinindedir. Burana

$$q_1 = \left[ \frac{1}{83.76} \quad 0 \quad 0 \right]$$

elde edilir. Açık çevrim sisteminin karakteristik polinomu

$$|sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -4.438 \\ 0 & 12 & s + 24 \end{vmatrix}$$

$$= s(s^2 + 24s + 12 \times 4.438) = s^3 + \underbrace{24}_{-\alpha_2} s^2 + \underbrace{53.37}_{-\alpha_1} s + \underbrace{0}_{-\alpha_0}$$

şeklinde bulunur.

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1 A \\ q_1 A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{88.76} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{88.76} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4.438}{88.76} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan da kolaylıkla  $Q^{-1}$  hesaplanır.

Artık sistemimizi yönetilebilir kanonik biçime dönüştürdük:

$$\tilde{A} = Q A Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -53.37 & -24 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bu durumda yeni koordinat sisteminde kazanç matrisi

$$\tilde{K} = [432 - 0 \quad 162 - 53.37 \quad 30 - 24] = [432 \quad 108.63 \quad 6]$$

şeklindedir. Orjinal koordinatlarda ise

$$K = \tilde{K} Q = [4.86 \quad 1.23 \quad 0.3]$$

şeklindedir.

## Çok girişli sistemlerde kutup atama tasarımı ( $m > 1$ )

Sistemimiz

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\quad (1)$$

şeklinde olsun. Kontrol kuralımız ise  $u = -Kx + r$  şeklinde belirlensin. Ayrıca  $\text{rank } B = m$  olsun ve sistem bütünüyle yönetilebilir olsun. Yani

$$C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

matrisinin rankı  $n$  olsun.

İstenen kapalı çevrim sisteminin karakteristik denklemini

$$\Delta_{cl}(s) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

şeklinde yapmak olacaktır. Öncelikle yapılması gereken sistemi yönetilebilir kanonik forma getirmektir. Bunun için  $C$  yönetilebilirlik matrisini sütunlarının ilişkilerini de ortaya koyacak şekilde yeniden yazalım: Şayet  $B = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m]$  şeklinde ise

$$C = [b_1 \quad \dots \quad b_m \mid Ab_1 \quad \dots \quad Ab_m \mid \dots \mid A^{n-1}b_1 \quad \dots \quad A^{n-1}b_m]$$

yazılabilir. Bu matrisin içinden sol aştan itibaren sırasıyla lineer bağımsız sütunlarını seçerek kurulan  $n \times n$  boyutlu matris  $\bar{C}$  olsun.  $\bar{C}$  içinde  $b_1$  sütunundan türemiş sütunlar  $\mu_1$  adet,  $b_2$  sütunundan türemiş sütunlar  $\mu_2$  adet, benzer şekilde  $b_m$  sütunundan türemiş sütunlar ise  $\mu_m$  adet olsunlar.

Örneğin  $\bar{C}$  matrisi

$$\bar{C} = [b_1 \quad b_2 \quad Ab_1 \quad A^2b_2]$$

şeklinde gibi olur (Burada  $\mu_1 = 2, \mu_2 = 2$  dir.). Yani  $B$  matrisinin kolonlarına göre sıralı değildir. Şimdi bu elde edilen  $\bar{C}$  matristen  $B$  nin kolonlarına göre sıralı yeni bir matris elde etmeye çalışalım:

$$L = [b_1 \quad \dots \quad A^{\mu_1-1}b_1 \mid b_2 \quad \dots \quad A^{\mu_2-1}b_2 \mid \dots \mid b_m \quad \dots \quad A^{\mu_m-1}b_m]$$

Burada  $\mu_i \mid i = 1, 2, \dots, m$  tam sayılarına **yönetilebilirlik indisi**; bunların en büyüğüne ise  $(\mu = \max_i \mu_i)$  **yönetilebilirlik indeksi** adı verilir.

Açıktırki bütünüyle yöneilebilir bir sistemde yönetilebilirlik indislerinin toplamı= $n$  dir.

Farz edelim ki bir sistemde 2 kontrol girişi bulunuyor olsun. Yani  $m = 2$  olsun. Ayrıca bu sistemde  $\mu_1 = 2$  olsun. Bu durumda sistem ikinci kontrol girişi olmaksızın kontrol edilebilir. Yani aslında gereksiz yere ikinci bir kontrol girişi uygulanmıştır.

Aslında yönetilebilirlik indisleri, ilgili girişe ait yönetilebilirlik alt uzayının boyutudur. Bu alt uzay ne kadar büyükse, ilgili giriş sistem denetiminde o derece etkilidir. Bu durumda yönetilebilirlik indeksine sahip olan giriş, sistemin yönetiminde en etkin giriştir.

Şu tanımlamaları yapalım:

$$\sigma_1 = \mu_1$$

$$\sigma_2 = \mu_1 + \mu_2$$

$$\vdots$$

$$\sigma_m = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_m = n$$

Şimdi bu sıralı  $L$  matrisinin tersini alalım

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ \vdots \\ q_1 \\ \hline \star \\ \star \\ \vdots \\ q_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \star \\ \star \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix}$$

$\sigma_1$  nci satır  
 $\sigma_2$  nci satır  
 $\sigma_m$  nci satır

Bu matrisin  $\sigma_i$ 'nci satırları vasıtası ile  $Q$  matrisini şu şekilde kuralım:

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_1 A \\ \vdots \\ q_1 A^{\mu_1-1} \\ \hline q_2 \\ q_2 A \\ \vdots \\ q_2 A^{\mu_2-1} \\ \hline \vdots \\ \hline q_m \\ q_m A \\ \vdots \\ q_m A^{\mu_m-1} \end{bmatrix}$$

Şimdi  $\tilde{x} = Qx$  dönüşümü yaparsak yeni koordinatlarda

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u$$

sistemi elde edilir. Burada

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \cdots & \tilde{A}_{1m} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} & \cdots & \tilde{A}_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \tilde{A}_{m1} & \tilde{A}_{m2} & \cdots & \tilde{A}_{mm} \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = QB = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \hline \tilde{B}_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \tilde{B}_m \end{bmatrix}$$

şeklinde oluşur. Burada

$$\tilde{A}_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \star & \star & \star & \cdots & \star \end{bmatrix}_{\mu_i \times \mu_i} \quad \tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \star & \star & \star & \cdots & \star \end{bmatrix}_{\mu_i \times \mu_i} \quad i \neq j$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & * & * & \dots & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & * & \dots & * \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Bundan sonra tasarımı yapmak oldukça kolay. Ancak tasarım esnasında birkaç yöntem izlenebilir. Son aşama ise  $K = \tilde{K}Q$  bağıntısı ile  $K$  kazancını çekmektir. Bunu en iyi bir örnek üzerinde açıklayabiliriz:

Aşağıdaki sistemde kapalı çevrim kutuplarını  $\{-5, -5, -3 \pm j3\}$  noktalarına taşıyan en az 2 farklı kontrolör bulunuz?

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & -11 & 12 & 31 \\ -3 & 13 & -11 & -33 \\ 4 & -25 & 14 & 51 \\ -3 & 16 & -11 & -36 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 6 \\ -1 & -11 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} u$$

Yapılması gereken ilk iş,  $C$  yönetilebilirlik matrisinin kurulmasıdır.

$$C = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc} -1 & -4 & 6 & 11 & -12 & -27 & 16 & 73 \\ 1 & 6 & -6 & -20 & 14 & 59 & -24 & -175 \\ -1 & -11 & 8 & 37 & -20 & -111 & 36 & 331 \\ 1 & 7 & -6 & -23 & 14 & 68 & -24 & -202 \end{array} \right]$$

MATLAB altında bu matrisi kurmak için `ctrb(A,B)` komutu kullanılır. Bu matrisin rankı 4 olduğundan sistem bütünüyle yönetilebilirdir. Daha sonraki işlem, bu matrisin kolonları üzerinde soldan sağa doğru giderek önceki matrislere göre lineer bağımsız  $n = 4$  adet kolon vektörlerini toplamaktır. Yukarıdaki  $C$  matrisinde ilk 4 kolon lineer bağımsızdır. Yani

$$\bar{C} = [b_1 \quad b_2 \quad Ab_1 \quad Ab_2] = \left[ \begin{array}{cc|cc} -1 & -4 & 6 & 11 \\ 1 & 6 & -6 & -20 \\ -1 & -11 & 8 & 37 \\ 1 & 7 & -6 & -23 \end{array} \right]$$

Bu durumda  $L$  matrisi

$$L = [b_1 \quad Ab_1 \quad b_2 \quad Ab_2] = \left[ \begin{array}{cc|cc} -1 & 6 & -4 & 11 \\ 1 & -6 & 6 & -20 \\ -1 & 8 & -11 & 37 \\ 1 & -6 & 7 & -23 \end{array} \right]$$

şeklinde elde edilir. Bu durumda  $\mu_1 = \mu_2 = \mu = 2$  şeklindedir. Bundan sonra  $L^{-1}$  ise

$$L^{-1} = \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 4/3 & -1 & 3 & 19/3 \\ 1/3 & -1 & 1/2 & 11/6 \\ -1 & -4 & 0 & 3 \\ -1/3 & -1 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_1 A \\ \sigma_2 \\ \sigma_2 A \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1/3 & -1 & 1/2 & 11/6 \\ 1/6 & 1/6 & 11/6 & 17/6 \\ -1/3 & -1 & 11/6 & 17/6 \\ 1/3 & 4/3 & -1/3 & -4/3 \end{array} \right]$$

Bu benzerlik dönüşümü vasıtası ile benzer sistemin  $\tilde{A}$  ve  $\tilde{B}$  matrisleri

$$\tilde{A} = Q A Q^{-1} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4/3 & -7/3 & 8/3 & 7/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2/3 & -5 & -14/3 \end{array} \right] \quad \tilde{B} = Q B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kontrol kazanç matrisinin genel yapısı ise

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{12} & \tilde{k}_{13} & \tilde{k}_{14} \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} & \tilde{k}_{23} & \tilde{k}_{24} \end{bmatrix}$$

Bu geri-beslemeyi benzer sistem üzerinde uygularsak, benzer sistem üzerinden kapalı çevrim sistem

$$\tilde{A} + \tilde{B} \tilde{K}$$

$$\begin{aligned} &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4/3 & -7/3 & 8/3 & 7/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2/3 & -5 & -14/3 \end{array} \right] + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & \tilde{k}_{12} & \tilde{k}_{13} & \tilde{k}_{14} \\ \tilde{k}_{21} & \tilde{k}_{22} & \tilde{k}_{23} & \tilde{k}_{24} \end{bmatrix} \\ &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4/3 + \tilde{k}_{11} & -7/3 + \tilde{k}_{12} & 8/3 + \tilde{k}_{13} & 7/6 + \tilde{k}_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 + \tilde{k}_{21} & -2/3 + \tilde{k}_{22} & -5 + \tilde{k}_{23} & -14/3 + \tilde{k}_{24} \end{array} \right] \end{aligned}$$

İşte bu arada yapımıza karar vermemiz gerekmektedir. Değişik  $\tilde{K}$  seçimi ile 2 farklı  $\tilde{A}$  yapısı oluşturulabilir. Bunlar:

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\beta_0 & -\beta_1 \end{array} \right] \quad \text{veya} \quad \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \end{array} \right]$$

Bu analizler sonucu soldaki yapıyı elde etmek için üst köşegen bloka 2 özdeğer, alt köşegen bloka diğer 2 özdeğer atılabilir. Sağdaki yapı uygun görülürse tüm özdeğerleri içine alan bir kapalı çevrim arzu edilen polinomu direkt oluşturulur. ve bu polinom aracılığı ile  $\tilde{k}_{21}$ ,  $\tilde{k}_{22}$ ,  $\tilde{k}_{23}$  ve  $\tilde{k}_{24}$  belirlenir.

Öncelikle üstteki köşegen blok vasıtası ile  $\{-5, -5\}$  özdeğerlerini atayalım. Sonra alt köşegen blok ile  $-3 \pm j3$  özdeğerlerini atayalım: Bunun için

$$(s + 5)(s + 5) = s^2 + 10s + 25 = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

$(s + 3 + j3)(s + 3 - j3) = s^2 + 6s + 18 = s^2 + \beta_1 s + \beta_0$  sağlanmalıdır. Buradan kontrolör

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} -23\frac{2}{3} & -7\frac{2}{3} & -8/3 & -7/6 \\ 2 & 2/3 & -13 & -4/3 \end{bmatrix}$$

bulunur. İkinci yöntemde ise yukarıda anlatılan ve sadece alt satırda katsayıları bulunan polinom oluşturulabilir: Yani kapalı çevrim karakteristik denklem

$$\begin{aligned} (s+5)(s+5)(s+3+j3)(s+3-j3) &= s^4 + 16s^3 + 103s^2 + 330s + 450 \\ &= s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 \end{aligned}$$

Bunun için kontrolör

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 4/3 & 7/3 & -8/3 & -7/6 \\ -448 & -329\frac{1}{3} & -98 & -34/3 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Gerçek kontrolör ise  $K = \tilde{K}Q$  bağıntısı ile hesaplanır.