Yönetilebilirlik ve Gözlenebilirlik

Tanım:(Yönetilebilirlik) Bir lineer sistemin herhangi bir t_0 zamanındaki $x(t_0)$ durumunu $t_1 > t_0$ olmak üzere $t_1 - t_0$ sonlu süresinde t_1 zamanındaki $x(t_1)$ son durumuna süren bir kontrol vektörü $u(t)$ bulunuyor ise $x(t_0)$ durumu t_0 anında yönetilebilir denir. Aksi taktirde $x(t_0)$ durumu t_0 anında yönetilemez bir durumdr.

Eğer $x(t_0)$ durum uzayında her ne olursa olsun yönetilebiliyorsa, sistem tümüyle yönetilebilirdir Yada kısaca sadece yönetilebilir denir. Tümü ile yönetilemeyen bir sistem kısmen yönetilebilir bir sistem olarak adlandırılır.

Bir $\dot{x} = Ax + Bu$ sistemi için aşağıdaki önermeler eşdeğerdir:

♦ *A nın özdeğerlerinin tamamı katsız ise, yönetilebilir köşegen biçime getirilmiş sistemde, $\tilde{B} = T^{-1}B$ matrisinin hiçbir satırı tümden sıfır değilse, $\dot{x} = Ax+Bu$ sistemi bütünüyle yönetilebilirdir.*

Hatırlatma:(Yönetilebilir köşegen biçim)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Örnek:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

sistemin özdeğerleri $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$ olduğundan sistemi köşegen kılan bir T benzerlik dönüşümü yazılabilir. Sistemin öz vektörleri $x_1 = [-2 \quad 1 \quad -1]^T$, $x_2 = [1 \quad 0 \quad 0]^T$ ve $x_3 = [-2 \quad -1 \quad 3]^T$ olduğundan T dönüşüm matrisi

$$T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Benzer sistemin $\tilde{B}$ matrisi ise

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0.5 & 2 \\ 3 & 6 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olduğundan sistem bütünüyle yönetilebilirdir.

♦ $x \in \mathbb{R}^n$ *ve* $u \in \mathbb{R}^r$ *olsun.* $\dot{x} = Ax + Bu$ *sistemi ancak ve ancak*

$$\mathcal{C} \triangleq \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}_{n \times rn}$$

matrisinin rankı n *ise yönetilebilirdir.*

Örnek

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

sisteminin yönetilebilir olup olmadığını belirleyiniz?

$$\mathcal{C} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & -2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 & -7 \\ 1 & 1 & -4 & -7 & 13 & 25 \end{array}\right]$$

$$\mathcal{C} \backsim \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & -2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & -5 & 11 & 23 \end{array}\right]$$

$$\mathcal{C} \backsim \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \boxed{1} & 0 & -2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -6 & 16 & 30 \end{array}\right]$$

$$\operatorname{rank} C = 3 = n$$

olduğundan sistem bütünüyle yönetilebilirdir.

♦ n. *mertebeden* $\dot{x} = Ax + Bu$ *sistemi, ancak ve ancak* $[\ sI - A \mid B\ ]$ *matrisinin rankı her* s *genelleştirilmiş frekansı için* n *ise yönetilebilirdir.*

Bu teoremin her s değeri için sağlanıp sağlanmadığını belirlemek neredeyse imkansızdır. Lakin ilgili matris yapısının rank düşümü, s değerinin A matrisinin özdeğerlerine eşit olduğunda oluşabileceği düşünüldüğünde, her s genelleştirilmiş frekansına bakmak yerine sadece A matrisinin özdeğerlerine bakmak yeterli olacaktır. Bu teste 'Popov -Belevitch- Hautus' testi (PBH) test adı verilir.

Ayrıca bu test diğer testlerden farklı olarak bütünüyle yönetilemeyen bir sistemde yönetilemeyen modların belirlenmesinde kullanılabilir.

Örnek:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

sistemininin bütünüyle yönetilebilir olup olmadığını belirleyiniz ve sistem bütünüyle yönetilebilir değilse yönetilemeyen modları belirleyiniz?

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C} \backsim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan rank $\mathcal{C} = 2 < 3$ olarak bulunur. Bu bakımdan açıktır ki sistem bütünüyle yönetilememektedir. Şimdi hangi modların (frekansların) yönetilemediğini belirleyelim: Açıktır ki sistemin karakteristik denklemi direkt olarak

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$$

şeklinde yazılabilir. Sistemin özdeğerleri ise $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ şeklindedir. Yönetilemeyen modları bulmak için ilgili özdeğerler $[\ sI - A \mid B\ ]$ matrisinde s yerine yerleştirilmeli ve oluşan matrisin rankına bakılmalıdır.

<u>$\lambda_1 = 1$ için</u>

$$\text{rank } [\ \lambda_1 I - A \mid B\ ] = \text{rank} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] = 2 < 3$$

olduğundan $\lambda_1 = 1$ modu yönetilemeyen bir moddur.

<u>$\lambda_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ için</u>

$$\text{rank } [\ \lambda_2 I - A \mid B\ ]$$

$$= \text{rank} \left[\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -1 \end{array} \right] = 3 = n$$

olduğundan λ_2 modu yönetilebilen bir moddur.

$\lambda_2 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ için

Sistemin λ_3 içinde yönetilebilir olduğu açıktır, zira λ_3, λ_2 nin eşleniğidir.

★ Yönetilemeyen mod, kararsız bir mod olduğundan sistem (**mevcut denetim yapısı ile**) hiçbir şekilde kontrol edilemez bir sistemdir.

Gözlenebilirlik(Observability)

Gözlenebilir olmak çıkışla durumların arasında ilişki olup olmadığına bağlıdır.

Tanım:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{1}$$

sisteminin $x(t_0)$ ilk durumu, $t_o \leq t \leq t_1$ zaman aralığında giriş-çıkış ölçümleri ile belirlenebiliyorsa, $x(t_0)$ durumu gözlenebilirbir durumdur. $x(t_o) \in \mathcal{X}$ durum uzayının herhangi bir elemanı için bu geçerli ise, sistem bütünüyle gözlenebilirdir.

Gözlenebilirliğin belirlenmesinde üç farklı yöntem vardır:

⧫ *Bir özdeğerleri katsız sistem gözlenebilir köşegen biçime getirildiğinde benzer sisteme ait $\tilde{C}$ matrisinin hiçbir sütunu bütünüyle sıfır değilse sistem bütünüyle gözlenebilirdir.*

Hatırlatma: (Gözlenebilir Kanonik Biçim)

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

♦ *Lineer zamanla değişmeyen bir sistemin*

$$\mathcal{O} \triangleq \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

gözlenebilirlik matrisinin tam sütun ranklı (n) olması durumunda (1) sistemi tam gözlenebilir bir sistemdir.

Örnek: Bir sistemde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}$, $B = [4 \quad 1]$ matrisleri var olsun. Sistemin gözlenebilirliğini irdeleyiniz?

Sistem için gözlenebilirlik matrisi

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $\operatorname{rank} \mathcal{O} = 1 < 2$ olduğundan sistem bütünüyle gözlenebilir değildir.

♦ *Bir sistemin tam olarak gözlenebilir olması ancak ve ancak* $\operatorname{rank} \left[\begin{array}{c|c} sI - A^{\top} & C^{\top} \end{array} \right] = n \quad \forall s \in \mathbb{C}$ *ise mümkündür.*

Bu matrisin rankını düşürecek $s \in \mathbb{C}$ değerleri ise A'nın özdeğerleridir. Bu bakımdan testin tüm s değerleri için değil, A'nın özdeğerleri için yapılması yeterlidir.

Meydana çıkarılabilirlik (Detectability): (1) sisteminde eğer herhangi bir L matrisi için $A + LC$ gibi kararlı bir matris elde edilebiliyor ise, (C, A) sistemi meydana çıkartılabilirdir denir.

Şayet bir sistem meydana çıkartılabilir bir sistem ise

$$\operatorname{rank} \left[\begin{array}{c|c} sI - A^{\top} & C^{\top} \end{array} \right]$$

tüm $\mathbb{R}\{s\} \geq 0$ olan özdeğerler için bu matris tam satır ranklıdır ($\operatorname{rank} = n$).

Bu durumda öyle bir L matrisi bulunabilir ki $A + LC$ kararlı olur. Yani tüm özdeğerleri sol yarı s düzleminde bulunur.

Örnek:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ y &= Cx \end{aligned}$$

sisteminde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = [1 \quad 0 \quad 1]$$

şeklindedir. Sistemin gözlenebilir modlarını belirleyiniz?

Gözlenebilirlik kriteri

$$\text{rank} \left[\begin{array}{c|c} \lambda_i I - A^\top & C^\top \end{array} \right] = n \quad \forall \lambda_i \quad i = 1, \ldots, n$$

şeklindedir. Bunun için öncelikle A matrisinin özdeğerleri hesaplanmalıdır. A matrisi üst kşegen formda olduğundan özdeğerleri köşegen üstündedir. Bu durumda özdeğerler $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ve $\lambda_3 = 2$ dir.

Genel olarak gözlenebilirlik koşulu

$$\left[\begin{array}{c|c} \lambda_i I - A^\top & C^\top \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda_i & 0 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda_i - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i - 2 & 1 \end{array} \right]$$

şeklindedir. Bu durumda

$\underline{\lambda_1 = 1 \text{ için:}}$

$$\left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 I - A^\top & C^\top \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \qquad \text{rank} = 3$$

olduğundan λ_1 meydana çıkartılabilir bir moddur.

$\underline{\lambda_2 = 2 \text{ için:}}$

$$\left[\begin{array}{c|c} \lambda_2 I - A^\top & C^\top \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \qquad \text{rank} = 3$$

olduğundan λ_1 meydana çıkartılabilir bir moddur. Tüm modlar meydana çıkartılabilir olduğundan sistem meydana çıkartılabilir bir sistemdir. Yada sistem bütünüyle gözlenebilirdir.

Kararlı kılınabilirlik (Stabilizability)

$\dot{x} = Ax + Bu$ sistemi yada bir başka değişle (A, B) matris çifti, eğer $u = Fx$ şeklinde bir geri-besleme ile $A + BF$ şeklinde bir kararlılık matrisi yaratılabiliyor ise kararlı kılınabilir bir sistemdir.

Bu durumda açıktır ki (A, B) den kurulu bir sistem kararlı kılınabilir bir sistemse, tüm kararsız modların yönetilebilir olması gerekir. Yani:

$$[\ A - \lambda I \mid B\ ]$$

matrisinin rankı her $\mathbb{R}\{\lambda\} \geq 0$ olan özdeğerler için n'e eşit olmalıdır.

Dualite:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{2}$$

sistemi verilmiş olsun. Ayrıca

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}\bar{u} \\ \bar{y} &= \bar{C}\bar{x} + \bar{D}\bar{u} \end{aligned} \tag{3}$$

sistemi de tanımlansın. Burada $\bar{A} = A^\top$, $\bar{B} = C^\top$, $\bar{C} = B^\top$ ve $\bar{D} = D^\top$ şeklinde olsun. Bu durumda (2) ve (3) sistemlerine dual sistemler denir ve yönetilebilirlik ve gözlenebilirlik dual kavramlardır. Yani (2) sisteminin yönetilebilirliği = (3) sisteminin gözlenebilirliğidir.

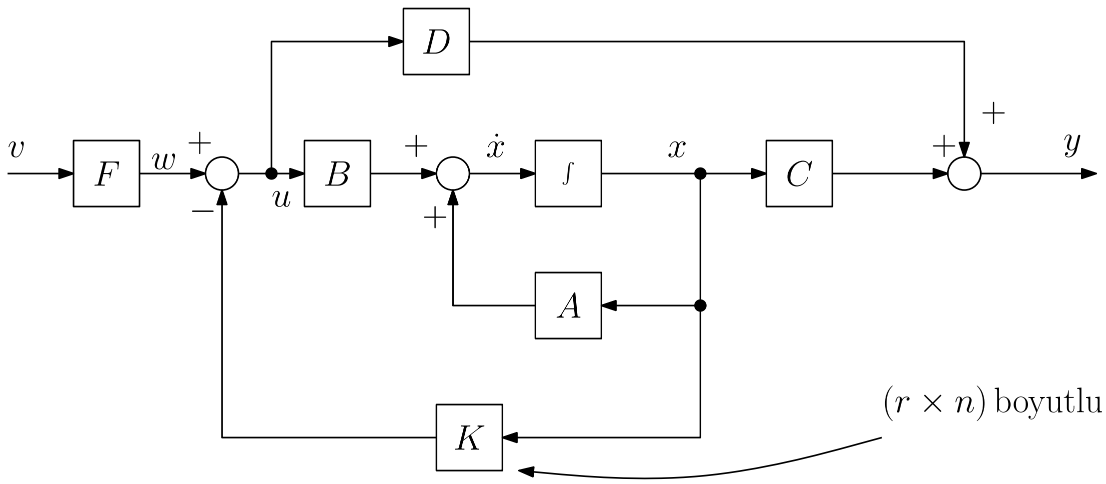
Lineer Geri-beslemeli kontrol sistemlerinin tasarımı

Geri-beslemeli denetim sistemlerinin tasarımında 2 yöntem göze çarpar. Bunlardan birincisi tüm durumların ölçülebilir olduğu yapıdır. Bu yapıda tüm durumlar ölçülür ve geri-beslenir. Buna durum geri-beslemesi adı verilir. İkinci yapı ise çıkışın sadece ölçülerek geri beslendiği yapıdır. Buna da Çıkış geri-beslemesi adı verilir.

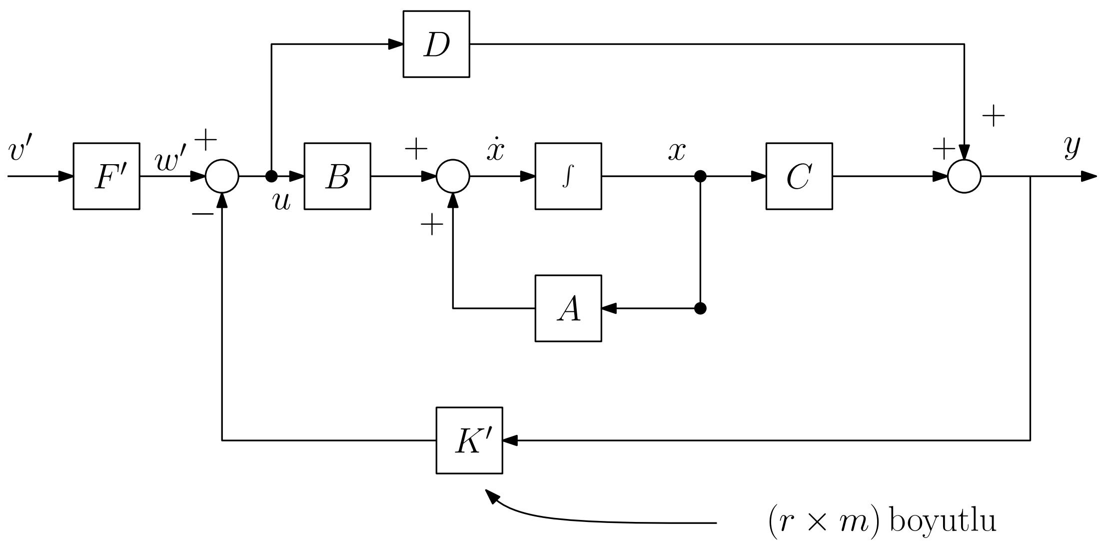
Durum geri beslemesi yapmak her sistem için mümkün olmaya bilir. Zira bazı durumlar ölçülebilir olmamaktadır. Yada ölçümleri çok pahalı olmaktadır. Bu gibi durumlarda ise şayet sistem gözlenebilir ise ölçülemeyen bu durumların kestirilerek geri-beslenmesi gerekir. Bu tipten durum kestirimi yapan sisemlere gözleyici (observer) adı verilir.

Fiziksel sistemlerde en çok çıkış geri beslemesi kullanılır. Ancak çıkış geri-beslemesinin kapalı çevrim kararlılığını her zaman sağlayacağını söylemek şu an için mümkün değildir (NP-Hard problem).

durum geri-beslemesi



çıkış geri-beslemesi



Durum Geri-beslemesi Açıktır ki kontrol işareti $u(t) = Fv(t) - Kx(t)$ olmaktadır. Bu kontrol kuralı

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

açık çevrim sistem denkleminde yerine yazılırsa kapalı çevrim sistem denklemi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \underbrace{[A - BK]}_{A_{cl}} x + \underbrace{BF}_{B_{cl}} v \\ y &= \underbrace{[C - DK]}_{C_{cl}} x + \underbrace{DF}_{D_{cl}} v \end{aligned}$$

şeklinde olacaktır. Bu durumda kapalı çevrim sisteminin tüm davranışını (kararlılık, performans, vs.) A_{cl} matrisinin özdeğerleri belirler.

Çıkış geri-beslemesi Kontrol kuralı diyagramdan da anlaşılacağı gibi rtık referans ve çıkışa bağlıdır. Yani

$$u(t) = F'v'(t) - K'y(t)$$

şeklindedir. Düzenlenirse

$$u(t) = F'v' - K'\left[Cx + DF'v' - DK'y\right]$$

elde edilir. Bu kuralı açık çevrim sistem denkleminde kullanırsak:

$$\dot{x} = \left[A - BK'\left[I_m + DK'\right]^{-1} C\right] x + B\left[F' - K'\left[I_m + DK'\right]^{-1} DF\right] v'$$

şeklinde durum denklemi elde edilir. Burada matris ter alma Lemması kullanılırsa

$$\boxed{I_r - K'\left[I_m + DK'\right]^{-1} D = \left[I_r + K'D\right]^{-1}}$$

$$\dot{x} = \underbrace{\left[A - BK'\left[I_m + DK'\right]^{-1} C\right]}_{A_{cl}} x + \underbrace{B\left[I_r + K'D\right]^{-1} F'}_{B_{cl}} v'$$

elde edilir.