Sıfırlayıcı polinom, Cayley-Hamilton Teoremi

Tanım: (Bir $(n \times n)$ boyutlu A matrisinin sıfırlayıcı polinomu)

$$p(\lambda) \triangleq \alpha_r \lambda^r + \alpha_{r-1}\lambda^{r-1} + \cdots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0 \qquad \alpha_r \neq 0$$

ile tanımlı polinom şayet

$$p(A) \triangleq \alpha_r A^r + \alpha_{r-1} A^{r-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$$

denklemini sağlıyor ise $p(\lambda)$, A nın bir **sıfırlayıcı polinomudur.**

Her zaman $r \geq n$ olmak üzere bir sıfırlayıcı polinom mevcuttur.

$p(\lambda)$, A nın r ninci dereceden sıfırlayıcı polinomu olmak üzere, $(r-1)$'inci dereceden başka bir sıfırlayıcı polinom yoksa, $p(\lambda)$, A nın **minimum polinomudur.**

Cayley-Hamilton teoremi:

$$\Delta(\lambda) \triangleq |sI - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

karakteristik polinom, A nın bir sıfırlayıcı polinomudur. Bu durumda

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$$

sağlanır. Aslında Cayley-Hamilton teoremi, her kare matrisin kendi karakteristik denklemini sağladığını söyler.

Cayley -Hamilton teoremi değişik uygulamalarda kullanılabilir. Bunlardan bazıları şu şekildedir:

A^{-1} in hesaplanması

$$\Delta(\lambda) \triangleq |sI - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

ve

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0$$

Cayley-Hamilton teoremi gereğince geçerlidir. Şimdi bu denklemin her iki tarafını A^{-1} ile çarpalım. Bu durumda

$$A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I + a_0 A^{-1} = 0,$$

$$a_0 A^{-1} = -\left(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I\right),$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1 I\right).$$

elde edilir.

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisinin tersini bulmaya çalışsalım. Açıktırki karaktersitik polinom

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 5$$

şeklindedir. Cayley - Hamilton teoremi gereğince

$$\Delta(A) = A^2 - 5A + 5$$

yazılabilir. Bu denklemin her iki tarafını A^{-1} ile çarparsak

$$A - 5I + 5A^{-1} = 0$$

elde edilir. A^{-1} yalnız bırakılırsa

$$A^{-1} = I - \frac{1}{5}A = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ -1/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır.

$n < m$ olmak üzere, $P(x)$ ve $P_1(x)$ sırası ile, m. dereceden ve n. dereceden polinomlar olsunlar. Bu durumda her zaman için

$$P(x) = Q(x) \times P_1(x) + R(x)$$

eşitliğini sağlayan $(n-m)$. dereceden $Q(x)$ ve $(n-1)$ veya daha küçük derecen $R(x)$ polinomları vardır.

Örnek

$$P(x) = 3x^4 + 2x^2 + x + 1$$

ve

$$P_1(x) = x^2 - 3$$

şeklinde polinomlar ise

$$\underbrace{3x^4 + 2x^2 + x + 1}_{P(x)} = \underbrace{(x^2-3)}_{P_1(x)}\underbrace{(3x^2+11)}_{Q(x)} + \underbrace{(x+34)}_{R(x)}$$

■

Benzer şekilde bir matris polinomu $P(A)$'da

$$P(A) = Q(A)P_1(A) + R(A)$$

şeklinde yazılabilir. Şayet $P_1(A) = \Delta(A)$ seçilirse

$$P(A) = Q(A)\underbrace{\Delta(A)}_{=0} + R(A) = R(A)$$

olarak hesaplanır.

Örnek Cayley-Hamilton teoremini kullanarak,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı bir matris için

$$P(A) = A^4 + 3A^3 + 2A^2 + A + I$$

matris polinomunun değerini hesaplayalım. Açıktırki

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 5$$

şeklindedir.

$$P(\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1$$

yazılabilir. Bu durumda

$$P(A) = (A^2 + 8A + 37I)\Delta(A) + 146A - 184I = 146A - 184I$$

elde edilir. ■

Bir Ω bölgesi içinde sürekli bir $f(x)$ fonksiyonunu ele alalım. Ayrıca $n \times n$ boyutlu bir A matrisinin tüm öz değerleri de bu bölge içinde olsun. Açıktır ki, $f(x)$ fonksiyonu sonsuz mertebeden bir polinom ile tanımlanabilir (Eğri uydurma). Yani

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^k \ , \ \alpha_k \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. Ayrıca $\Delta(x)$ gibi sonlu boyutlu bir başka polinomda elimizde bulunuyor olsun. Ancak bu polinom A'nın sıfırlayıcı polinomu olsun. Bu durumda $R(x)$ polinomunun derecesi $(n-1)$ den küçük veya eşit olacak şekilde

$$f(x) = \Delta(x) \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k x^k + R(x)$$

her zaman yazılabilir. Burada $R(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1} x^{n-1}$ şeklinde bir polinomdur. Bu özellikten yararlanarak ve $\Delta(x)$ in, A nın bir sıfırlayıcı polinomu olması özelliğini kullanarak

$$f(A) = R(A)$$

yazılabilir. Ancak $R(A)$ nın belirlenebilmesi için $\alpha_i \quad i = 0, \ldots, (n-1)$ katsayılarının bilinmesi gerekir. Ancak A matrisinin öz değerleri birbirinden farklı ise açıktır ki $\Delta(\lambda_i) = 0$ olacağından

$$f(\lambda_i) = R(\lambda_i) \qquad i = 0, \ldots, (n-1)$$

yazılabilir. Yani diğer bir deyişle, n bilinmeyen katsayı için n adet denklem yazılabilir.

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ise $\sin A = ?$

Açıktır ki bu sistem için karakteristik polinom $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$ dır. Buradan A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = -3$ ve $\lambda_2 = -2$ şeklinde hesaplanır. Ayrıca bu sistem için $n = 2$ olduğundan $R(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x$ şeklinde tanımlanabilir. $f(x)$ ise $f(x) = \sin x$ şeklindedir. O halde

$$\sin \lambda_1 = R(\lambda_1) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1$$

ve

$$\sin \lambda_2 = R(\lambda_2) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2$$

yazılabilir. Bu eşitlikler ise

$$\sin(-3) = \alpha_0 - 3\alpha_1,$$

$$\sin(-2) = \alpha_0 - 2\alpha_1$$

şeklindedir. Bu iki denklemden $\alpha_1 = \sin(-2) - \sin(-3)$ ve $\alpha_0 = 3\sin(-2) - 2\sin(-3)$ bulunur. Bu durumda

$$\sin(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A$$

eşitiliğinden

$$\sin(A) = \begin{bmatrix} \sin(-3) & \sin(-2) - \sin(-3) \\ 0 & \sin(-2) \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. ■

α_i'ler katlı ise yöntem küçük bir modifikasyona ihtiyaç duyar. Bu durumda bazı denklemler (katlı özdeğere karşı düşünler) hep aynı olur ($f(\lambda_i) = R(\lambda_i)$). Bu nedenle n adet lineer bağımsız denklem yaratılamaz. Ancak

$$\left.\frac{df(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_i} = \left.\frac{d\Delta}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_i} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \lambda_i^k + \Delta(\lambda_i) \frac{d}{d\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \lambda_i^k + \left.\frac{dR}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_i} = \left.\frac{dR}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_i}$$

geçerlidir.

Kısaca i. öz değer için cebirsel katlılık m_i olsun. Bu durumda m_i adet denklem

$$f(\lambda_i) = R(\lambda_i)$$
$$\left.\frac{df(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_i} = \left.\frac{dR}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_i}$$
$$\vdots$$
$$\left.\frac{d^{(m_i-1)}f(\lambda)}{d\lambda^{(m_i-1)}}\right|_{\lambda=\lambda_i} = \left.\frac{d^{(m_i-1)}R}{d\lambda^{(m_i-1)}}\right|_{\lambda=\lambda_i}$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 27 & -27 & 9 \end{bmatrix}$$

ise e^{At} =?

Kolaylıkla görülebilir ki $\Delta(\lambda) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 27\lambda - 27 = (3-\lambda)^3 = 0$ dır. Buradan da A matrisinin öz değerleri $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 3$ olarak bulunur. Biliyoruz ki

$$e^{At} = R(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2$$

yazılabilir. Burada $\{\alpha_i \mid i = 1, \ldots, 3\}$ katsayılarının çözülmesi gerekir. Bunun için

$$\boxed{e^{3t} = \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2}$$

$$\left.\frac{de^{\lambda t}}{d\lambda}\right|_{\lambda=3} = \frac{d}{d\lambda}\left[\alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2\right]\Big|_{\lambda=3}$$

$$\boxed{te^{3t} = \alpha_1 + 6\alpha_2}$$

ve

$$\boxed{t^2e^{3t} = 2\alpha_2}$$

eşitliklerinin toplu çözümü gerekir. Bu denklemler çözülürse

$$\alpha_0 = (1 - 3t + \frac{9}{2}t^2)e^{3t}$$

$$\alpha_1 = (t - 3t^2)e^{3t}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}t^2e^{3t}$$

bulunur. e^{At} ise

$$\begin{bmatrix} 1 - 3t + \frac{9}{2}t^2 & t - 3t^2 & \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{27}{2}t^2 & 1 - 3t - 9t^2 & t + \frac{3}{2}t^2 \\ 27t + \frac{81}{2}t^2 & -27t - 27t^2 & 1 + 6t + \frac{9}{2}t^2 \end{bmatrix} e^{3t}$$

olarak hesaplanır. ∎