

Ders #2 Matematiksel ön bilgi

Aşağıdaki lineer denklem sistemini göz önüne alalım:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m\end{aligned}$$

denklem sisteminde a_{ij} ler x_j ler ile y_i ler arasında ilişkileri ortaya koyar. Bu ilişkileri ortaya koyan sıralı dizilere katsayılar adı verilir ve topluca bir matrisle gösterilir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Bu durumda ilgili denklem

$$Ax = y$$

formunda ifade edilebilir. Burada $x^T = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]$ şeklindedir. Diğer taraftan $y^T = [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_m]$ şeklindedir.

matrisler (devam)

Eliminasyon

$$\begin{aligned}x + 2y + z &= 2 \\3x + 8y + z &= 12 \\4y + z &= 2\end{aligned}$$

denklem sistemini nasıl çözeriz?

Bir yöntem katsayı matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

nin tersini almak ve soldan

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ile çarpmaktır. Ama büyük matrislerde bu sorun yaratır. Matlab ve benzeri programlar bunu eliminasyon tekniği ile çözmektedir. Eliminasyon tekniğinde cebirsel satır işlemleri arttırılmış matris üzerinde kullanılarak üst üçgen formunda bir yapı elde edilir. Üst üçgen formunda bir yapı

$$\begin{bmatrix} \square & * & * \\ 0 & \square & * \\ 0 & 0 & \square \end{bmatrix}$$

şeklinindedir. Burada \square ile gösterilmiş elemanlar pivot elemanlardır. Bir matrisin tersinin alınabilmesi için o matrise ait pivot elemanların sayısı ilgili kare matrisin boyutu ile aynı olmalıdır.

Denklem çözümlü

Eliminasyon tekniğini problemimize uygularsak:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2,1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3,2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Açıkça görülmektedir ki ilgili denklem takımı için katsayı matrisinin 3 pivotu vardır. Yani 3 satırda lineer bağımsızdır. Yada başka bir deyişle katsayı matrisinin rankı üçtür. Bu durumda denklemin tek bir çözümü vardır. Çözümü bulmak için ise arttırılmış matrisi kurmalı ve eliminasyon tekniğini uygulamalıyız:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2,1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3,2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{bmatrix}$$

Denklem takımı ise

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2y - 2z &= 6 \\ 5z &= -10 \end{aligned}$$

olur. Buradan da kolaylıkla $z = -2$, $y = 1$ ve $x = 2$ şeklinde hesaplanır.

Elementer dönüşüm matrisleri

Eliminasyon esnasında elementer satır işlemlerini yerine getiren dönüşüm matrislerine elementer matrisler adı verilir.

Örneğin

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisine elementer satır işlemleri uygulanırsa üst üçgen formda

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Bu işlemleri yerine getirmek için her adımda ilgili matris soldan elementer matrislerle çarpılır. Bu örnek için yapılan işlemler:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{E_{21}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{32}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Benzer şekilde elementer sütun işlemlerinde de ilgili matrisi sağdan elementer matrislerle çarpmak gerekir. O halde U üst üçgen formunda bir matris ise

$$E_{32}E_{21}A = U$$

geçerlidir. O halde bizi A dan alıp U ya taşıyan dönüşüm

$$T \triangleq E_{32}E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak belirlenir.

Lineer dönüşüm

Lineer Dönüşüm

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}}_y$$

Ne anlama gelir? Aslında $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ şeklinde lineer uzaylar arası dönüşümdür. Örneğimizde \mathcal{X} ve \mathcal{Y} 3 boyutlu uzaylardır. Yapılan işlem ise şu şekildedir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}}_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} 2 + \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} 1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (-2)$$

Baz vektör: Bir \mathcal{X} uzayında herhangi bir vektörü göstermek için gerekli olan lineer bağımsız vektörlere ilgili uzayın baz vektörleri adı verilir.

Şimdi $A : \mathcal{X}^n \rightarrow \mathcal{Y}^m$ dönüşümünü ele alalım. Ayrıca, farz edelimki $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ \mathcal{X} uzayının, $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ \mathcal{Y} uzayının baz vektörleri olsun. O halde \mathcal{X} uzayındaki her baz vektöründe \mathcal{Y} altında A üzerinden bir görüntüsü vardır ve bu görüntüler \mathcal{Y} uzayının baz vektörleri cinsinden yazılabilir: Yani

$$\begin{aligned} Ax_1 &= a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \\ Ax_2 &= a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \\ &\vdots \\ Ax_n &= a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \end{aligned}$$

Şimdi \mathcal{X} uzayında rasgele bir x vektörünü ele alalım. Açıkçası bu x vektörü \mathcal{X} 'in bazları cinsinden

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \in \mathcal{X}$$

şeklinde gösterilebilir.

Lineer dönüşüm

Şimdi bu x vektörünün A altındaki görüntüsünü ele alalım:

$$\begin{aligned} Ax &= \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 + \cdots + \alpha_n Ax_n \\ &= \alpha_1 (a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m) + \alpha_2 (a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m) \\ &\quad + \cdots + \alpha_n (a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m) \end{aligned}$$

$$Ax = \underbrace{(a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1n}\alpha_n)}_{\beta_1} y_1 + \cdots + \underbrace{(a_{m1}\alpha_1 + \cdots + a_{mn}\alpha_n)}_{\beta_m} y_m$$

Biz biliyoruzki, x vektörünün A lineer dönüşümü altındaki görüntüsü \mathcal{Y} uzayının bir elemanıdır ve o görüntü \mathcal{Y} uzayının bazıları cinsinden gösterilebilir. Bu gösterim yukarıdaki denklemde de açıkça görülmektedir. O halde $\beta_i \mid i = 1, \dots, m$ ler x in A altındaki görüntüsünün koordinatlarıdır.

$\alpha_i \mid i = 1, \dots, n$ x vektörünün \mathcal{X} uzayı altındaki koordinatları ise ve $\beta_i \mid i = 1, \dots, m$ ler x in A altındaki görüntüsünün koordinatları ise koordinatlar arası dönüşüm

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Yada bir başka deyişle

$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \alpha_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \alpha_n$$

yazılabilir. Buradan şu sonuç net bir şekilde çıkarılabilir:

$$A = [Ax_1 \quad Ax_2 \quad \cdots \quad Ax_n]$$

Yani A lineer dönüşümünün sütunları \mathcal{X} uzayının baz vektörlerinin A altındaki görüntüleridir.

Hangi matrislerin tersi alınabilir?

- Matris kare olmalı
- Kolonlar veya satırlar lineer bağımsız olmalı (Determinat $\neq 0$)

Örnek $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi yoktur. Buna karşın $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ matrisinin tersi vardır.

Bir matrisin tersinin elementer satır işlemleri ile hesabı Örneğin bir A matrisinin tersini bulmak için ilgili matrisin kolonları aynı boyutta bir I matrisi ile arttırılır. Elde edilen matris açıktırki $[A|I]$ olacaktır. Daha sonra bu matrise elementer satır işlemleri uygulanarak

$$E[A \mid I] = [I \mid E]$$
elde edilir. Yani $E[A \mid I] = [EA \mid E] = [I \mid E]$. Bu durumda $E = A^{-1}$ olur.

Örnek $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ matrisinin tersini bulalım:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Açıktırki $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Bir matrisin tersi yoksa sütunları(satırları) lineer bağımlıdır. Yani $\exists r \neq 0, \ni Ar = 0$. Yada $\mathcal{N}(A) \neq 0$. Burada $\mathcal{N}(\cdot)$ ilgili matrisin sıfır uzayı operatörüdür.

Örneğin $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ matrisinin tekil olduğu açıktır. Bu durumda öyle bir $r = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ vardır ki

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Gerçekten de

$$r = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

sıfırdan farklı bir vektördür ve bu eşitliği sağlar.

Bir matrisin transpozu Bir $A_{m \times n}$ matrisinin transpozu A^T şeklinde gösterilir ve A matrisinin satırlarının sütün şeklinde yer değiştirilmesi ile elde edilir. Boyutu ise $n \times m$ dir. Örneğin

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

dir.

Transpoz operatörünün özellikleri

$$(AB)^T = B^T A^T$$

dir. Şayet A matrisi $A \in \mathbb{C}$ ise A^T yerini A^* işlemi alır. A^* , A nın kompleks konjuge transpozudur. Simetrik bir matriste $A^T = A$ dir.

Bir matrisin adjointi $\text{adj}A$ ile gösterilir. Bu matris A matrisinin ko-faktörlerinden oluşturulmuş matrisin transpozuna eşittir.

Örnek

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisinin kofaktörleri $C_{11} = -3$, $C_{12} = 2$, $C_{13} = 1$, $C_{21} = -4$, $C_{22} = 1$, $C_{23} = -2$, $C_{31} = 6$, $C_{32} = -4$ ve $C_{33} = 3$ dür. Bu durumda

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 6 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

olur.

Determinant $\det A = |A|$ ile gösterilir ve her kare matrisle ilişkilendirilmiş bir sihirli sayıdır. İlgili matris hakkında çok şey söyler. 3 özelliği vardır:

- $\det I = 1$.
- Her satır değişikliği determinantın işaretini değiştirir. **Örnek**
 $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$ dir.

- 1.

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

- 2.

$$\begin{vmatrix} a + a' & b + b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$$

Yani bir satır için determinant lineerdir.

Bu 3 özellikten 7 özellik daha türetilir:

- *Bir matriste 2 eşit satır varsa o matrisin determinantı sıfırdır!* (Neden?) **Cevap:** A matrisinin 2 satırı aynı olsun. O iki satırın yerini değiştirsek te, ilgili matris değişmez. Ancak matrisin determinantının işareti değişecektir. Bunun olabilmesinin tek koşulu $\det A = 0$ olmasıdır.
- *Bir satırın bir sabit ile çarpılıp diğer bir satırdan çıkartılması (satır ile toplanması) matrisin determinantını değiştirmez.*

ispat:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c-la & d-lb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ -la & -lb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - l \begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

- Bir matrisin bir satırı tümünden sıfır ise, o matrisin determinanı sıfıra eşittir.

$$\begin{vmatrix} ta & tb \\ c & d \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

ifadesinde $t = 0$ alınırsa

$$0 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

olur.

•

$$U = \begin{bmatrix} d_1 & * & * & * \\ 0 & d_2 & * & * \\ 0 & 0 & d_3 & * \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

üst üçgen matrisinin determinanı $\det U = d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4$ dür.

İspat: * terimlerinin hepsi elementer satır işlemleri ile 0 yapılabilir. Bilindiği gibi elementer satır işlemleri matrisin determinantını değiştirmez. Bu durumda

$$\tilde{U} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Açıktır ki $\det U = \det \tilde{U}$. Buradan da

$$\det U = \det \tilde{U} = d_1 d_2 d_3 d_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = d_1 d_2 d_3 d_4$$

elde edilir.

- A tekil bir matris ise (sıfır satır içeriyorsa) $\det A = 0$ dır.

- $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ dir.

Örnek: $\det A^{-1} = ?$ $A^{-1}A = I$, $(\det A^{-1})(\det A) = 1$ Buradan da $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ elde edilir.

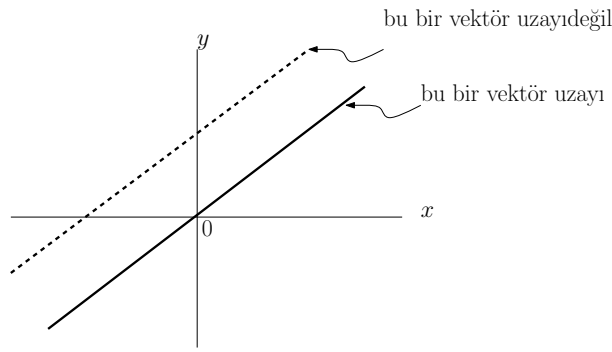
- $\det A^T = \det A$

Örnek:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Lineer Vektör uzayları

\mathcal{X} lineer vektör uzayının elemanları, vektör adı verilen ve \mathcal{F} skalerler cismi üzerinde tanımlanmış yönlendirilmiş doru parçalarıdır. İlgili uzayın bir vektör uzayı olabilmesi için o uzayın toplama ve çarpmaya göre kapalı olması gerekir. Yani $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{X}$ ve $a, b \in \mathcal{F}$ olmak üzere, $ax + by \in \mathcal{X}$ olması gerekir. Bu durumda $x - y$ kartezyen düzlemi 2 boyutlu bir vektör uzayıdır. Ancak bu uzayın birinci çeyrek dilimi bir vektör uzayı oluşturmaz. Ayrıca orjinden geçen bir doğru bir vektör uzayı oluştururken, orjinden geçmeyen bir doğru bir vektör uzayı oluşturmaz.



Bu durumda 2 boyutlu bir uzayda

- Uzayın kendisi
- orjinden geçen herhangi bir doğru
- sıfır vektörünün kendisi

bir alt uzay oluşturur. Diğer taraftan 3 boyutlu bir uzayda

- Uzayın kendisi
- orjinden geçen herhangi bir düzlem
- orjinden geçen bir doğru
- sıfır vektörünün kendisi

bir alt uzay oluşturur.

Matris alt uzayları

Bir matrisin kolonlarının lineer kombinasyonu bir alt uzay oluşturur. Buna ilgili matrisin kolon uzayı $\mathcal{C}(\cdot)$ adı verilir. Örneğin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisinin kolon uzayı

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

dir. Şimdi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

her b için çözümü var mı? Bazı b ler bu denklemi çözer, hangi b ler? Örneğin

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

için çözüm vardır. Ayrıca

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

içinde çözüm vardır. Açıkcası çözümün var olabilmesi için $b \in \mathcal{C}(A)$ olmalıdır.

Bir matrisin sıfır uzayı

Aynı A matrisinin sıfır uzayı aslında $Ax = 0$ yapan x vektörleridir. ancak $x = 0$ her zaman bu eşitliği sağlayacağından biz genelde $x \neq 0$ larla ilgileniriz. A matrisinin sıfır uzayı $\mathcal{N}(A)$ şeklinde gösterilir. Yani:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Örneğin

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{N}(A)$$

dır. Diğerleri $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, yada c bir skaler olmak üzere $c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ dir. Sıfır uzayı orjinden geçen bir doğrudur. O halde bir alt uzaydır. Cebirsel olarak ispat edelim:

İspat: x ve $x^* \in \mathcal{N}(A)$ olsun. Açıkça $Ax = 0$ ve $Ax^* = 0$ dir. Ayrıca buradan $A(x + x^*) = 0$ ve $A(cx) = cAx = 0$ yazılabileceğinden $\mathcal{N}(A)$ bir lineer vektör uzayıdır.

Bir matrisin sıfır uzayı nasıl hesaplanır? Örneğin

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

matrisinin sıfır uzayını hesaplamaya çalışalım. Bunun için yapılması gereken işlem: elementer satır işlemleri ile ilgili matrisi üst üçgen formuna getirmektir. Bu eliminasyon ile şu şekilde yapılır:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada $\boxed{\cdot}$ elemanları pivot elemanlardır. Pivot elemanlarına karşı gelen çarpanlar $\boxed{\cdot}$ ile gösterilirse aradığımız vektör

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{x_1} \\ x_2 \\ \boxed{x_3} \\ \boxed{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eşitliğini sağlayan x vektörüdür. Burada x vektörü üzerinde kutu ile işaretlenmemiş olan elemanlar serbest elemanlardır ve onlara istenilen değerler verilebilir. Bu durumda

$$\mathcal{N}(A) = c \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. A matrisinin rankı ilgili matrisin pivot sayına eşittir. Lineer bağımsız özel çözümlerin sayısı (sıfır uzayının boyutu) ise n , A matrisinin kolonlarının sayısını göstermesi durumunda

$$\text{rank}A = n - \#\text{pivot}(A)$$

dır. Yani kısaca

$$\text{Özel Çözümlerin lineer kombinasyonu} = \mathcal{N}(A)$$

dir.