Ders #1 Matematiksel modelleme

- Elektrik devrelerinin modellenmesinde Kirchoff'un akım ve gerilimler kanunu (Bir düğüme giren akımlar toplamı ile düğümden çıkan akımlar toplamı birbirine eşittir.)

- Mekanik sistemlerin modellenmesinde ise Newton kanunları geçerlidir (Bir cisme bir yönde etki eden kuvvetler toplamı daima sıfırdır).

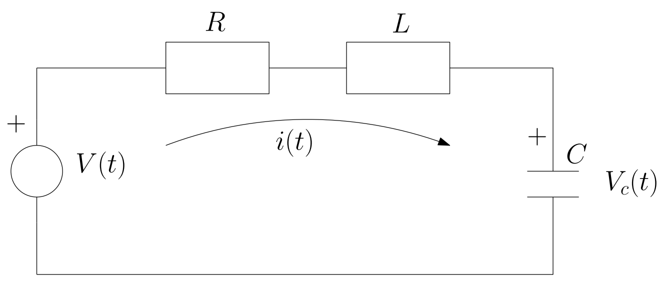
  Durum Bir sistem de haraket eden her büyüklüğe (türevi olan herşey) *sistemin durumu* adı verilir.

  Bu nedenle bir sisteme ait durum denklemleri o sistemin tüm dinamik davranışını ortaya koyar.

  Bir elektrik devresinde durumlar bobin akımları ve kapasite gerilimleridir.

  Mekanik sistemlerde durumlar çoğu zaman yer değiştirme, hız ve ivme büyüklükleri olarak seçilir.

  Örnek olarak şu devrenin durum denklemlerini elde etmeye çalışalım:



Elektriksel Sistemlerin modellenmesi

$L\frac{d}{dt}i_L(t) = V_L(t)$, $C\frac{d}{dt}V_C(t) = i_C(t)$, $i_C(t) = i_L(t) \triangleq i(t)$ seçimi altında durum denklemleri

$$L\frac{d}{dt}i_L(t) = V(t) - Ri(t) - V_C(t)$$

$$C\frac{d}{dt}V_C(t) = i(t)$$

yazılabilir. Durum değişkenleri türevi alınan herşey olması gerektiğinden $x(t) = [i(t)\ V_C(t)]^\mathsf{T}$ şeklide seçilebilir. Bu durumda durum denklemleri kapalı formda $\dot{x} = Ax + Bu$ yapısında şu şekilde gösterilebilir:

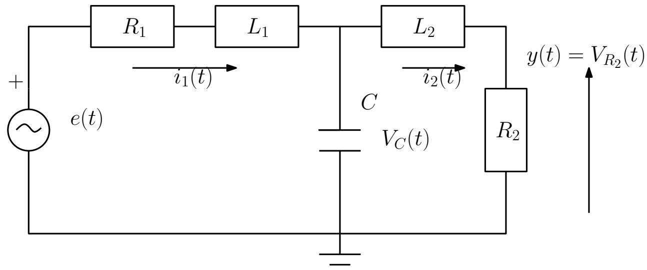
$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} V(t)$$

Farz edelimki çıkış $V_C(t)$ olsun. Bu durumda çıkış denklemi $y(t) = [0 \quad 1]\begin{bmatrix} i(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix}$ olacaktır. Toplu gösterecek olursak

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ şeklindedir. Burada $x(t)$ durum vektörüdür ve $n-$ boyutlu uzayın elemanıdır.

Örnek 2



devresinin durum uzayı modelini elde edelim: Öncelikle enerji tutan elemanlara ait denklemleri yazalım.

$$L_1 \frac{d}{dt} i_1(t) = e(t) - R_1 i_1(t) - V_C(t),$$

$$C \frac{d}{dt} V_C(t) = i_1(t) - i_2(t)$$

ve

$$L_2 \frac{d}{dt} i_2(t) = V_C(t) - R_2 i_2(t)$$

durum vektörü

$$x = [i_1 \; i_2 \; V_C]^\top$$

şeklinde seçilirse durum denklemleri:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_1/L_1 & 0 & -1/L_1 \\ 0 & -R_2/L_2 & 1/L_2 \\ 1/C & -1/C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e(t)$$

Çıkış denklemi ise

$$y(t) = [0 \quad R_2 \quad 0] \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix}$$

şeklinde olur.

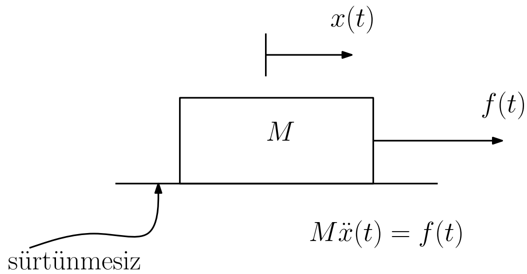
Mekanik Sistemler

Mekanik Sistemler hareketleri göz önüne alındığında 2 ana gruba ayrılır. Bunlar: Düzlemsel hareket, dairesel hareket. Newton'un hareket yasası geçerlidir.

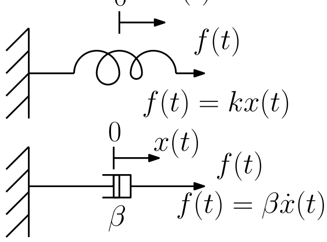
Düzlemsel hareket

$$\Sigma\text{Kuvvet} = M \times a$$

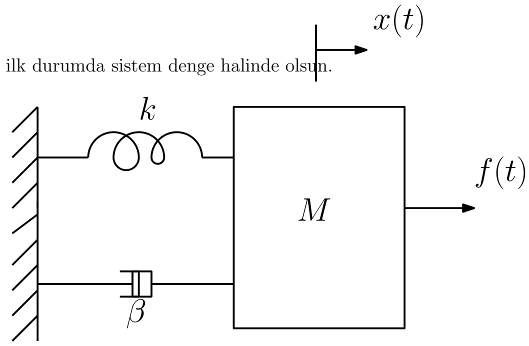
Burada Kuvvet [N] cinsinden M [kg] cinsinden ve a ivmesi [m/s^2] cinsinden gösterilir. Sürtünmesiz bir yüzeyde hareket eden bir cismin $f(t)$ kuvveti altındaki dinamik davranışı



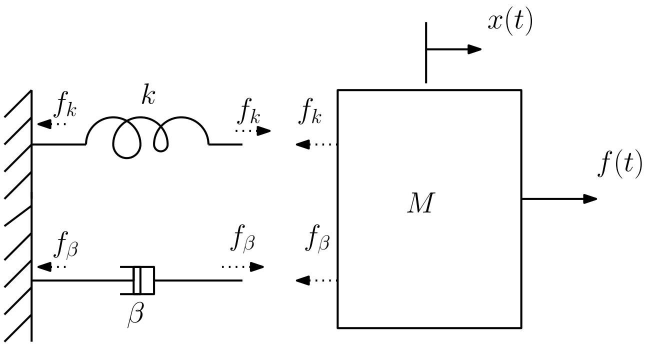
şeklinde olur. Gerçek hayatta fiziksel sistemler sürtünmelere maruz kalırlar. Sürtünmeler 3 tip olur. Bunlar: Statik sürtünme, Coulomb sürtünmesi ve Viskoz sürtünmesidir. **Statik sürtünme** sadece kütle harete ilk başladığında harekete ters yönde etkir. Sistem hareket ederken etkisi sıfırdır. Yani $F_{\text{statik}} = \pm(F_s)|_{\dot{x}=0}$. **Coulomb sürtünmesi** ise sabit genlikli bir kuvvettir ve sistem hareket yönünün tersi yönünde sisteme etkir. En sık karşılaşılan sürtünme tipi ise hızla orantılı sürtünmedir. Bu sürtünmeye **vizkoz sürtünmesi** adı verilir. Yani $F_v = \beta\dot{x}$. Yaya etkiyen kuvvet $f(t)$ ise yayın bu kuvveti karşılama kuvveti yayın uzaması ile orantılıdır. Benzer şekilde bir damper elemanına etkiyen kuvvet $f(t)$ ise damperin bu kuvveti karşılama kuvveti elemanın uzama hızı $\dot{x}(t)$ ile doğru orantılıdır. Burada yay sabiti k; viskoz sürtünme katsayısı ise β ile gösterilmiştir.



Örnek



Sisteminin durum denklemlerini elde edelim: Yapılması gereken ilk iş serbest cisim diyagramını çizmektir.



Hareket denklemleri ise

$$f(t) - f_k - f_\beta = M\ddot{x}$$

$$f(t) - kx - \beta\dot{x} = M\ddot{x}$$

şeklide yazılabilir. Durum vektörü ise $\eta \triangleq [x\ \dot{x}]^\top$ şeklinde seçilebilir (Durumlar türevi olan herşeydir!). Bu durumda, durum denklemleri

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & -\beta/M \end{bmatrix} \eta + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} f(t)$$

şeklinde olur. Çıkış denklemi ise

$$y(t) = [1 \quad 0]\, \eta$$

olarak alınabilir.

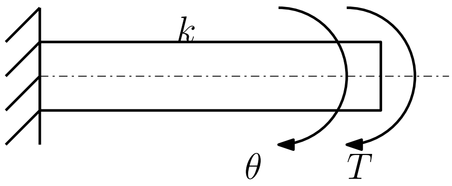
Döner hareketli sistemler

Düzlemsel hareket ile dairesel (Döner) hareket arası ilişkiler şu şekildedir:

Doğrusal Hareket	Döner Hareket
F [N]	T [Nm]
M [kg]	J [kgm^2]
x [m]	θ [rad]

Döner harekette k sertliğine sahip bir cismin burulması şekilde gösterilmiştir:

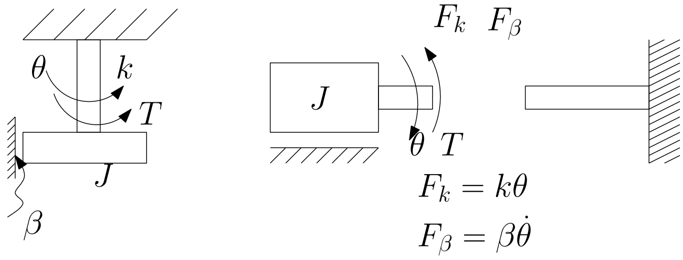
burulma



$$T(t) = k\theta$$

Aşağıdaki şekilde gösterilen sistemde β yatak sürtünmesini gösteriyor olsun. k ise J ataletli cismi rijid mesnete bağlayan çubuğun sertliğini gösteriyor olun. Sistemin durum denklemlerini elde edelim:

serbest cisim diyagramı



$$F_k = k\theta$$

$$F_\beta = \beta\dot{\theta}$$

$$T(t) - \beta\dot{\theta} - k\theta = J\ddot{\theta}$$

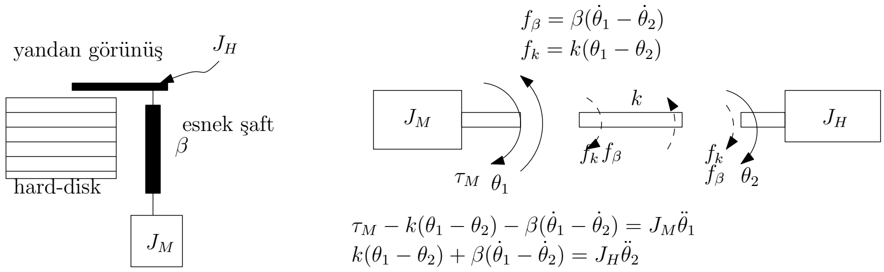
Durum vektörü $x^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix}\theta & \dot{\theta}\end{bmatrix}$ seçilebilir. Bu durumda durum denklemleri

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\theta \\ \dot{\theta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -k/J & -\beta/J\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta \\ \dot{\theta}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ 1/J\end{bmatrix} T(t)$$

olur.

Örnek döner hareketli sistem

Örnek Aşağıdaki resimde kaba gösterilimi bulunan bir hard disk konum kontrol mekanizmasını göz önüne alalım.



Bu sistem için durum vektörü $x^\top = \begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \dot\theta_1 & \dot\theta_2\end{bmatrix}$ seçilebilir. Durum denklemleri ise:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -k/J_M & k/J_M & -\beta/J_M & \beta/J_M\\ k/J_H & -k/J_H & \beta/J_H & -\beta/J_H\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1/J_M\\0\end{bmatrix}\tau_M$$