Sistem kutup sayısının ikiden fazla olması durumu

Bundan önceki derslerde sistem kutuplarının sayısının iki veya bir olduğu durumları incelemiştik. Aşım, tepe zamanı, yükselme ve yerleşme zamanı gibi verileri hep bu türden sistemler üzerinde belirlemiştik.

Ancak gerçekte sistemlerin kutup sayıları ikiden fazla olabilir. Hatta sistemlerin sıfırları da bulunabilir. Fakat bazı kabullenmeler yapılarak, bu türden yüksek mertebeden sistemler, ikinci mertebeden sistemler gibi ele alınabilir.

Bu bölümde işte bu türden sistemleri inceleyeceğiz: Şimdi farz edelim ki $G(s)$ sistemini 2 adet kompleks kutup ve 1 adet reel kutup içeriyor olsun. Ayrıca sistemin girişine $U(s) = 1/s$ şeklinde birim basamak işaret uygulansın. Bu durumda açıktırki sistem çıkış işareti, kısmi kesirlerine ayrıştırıldığında

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B(s + \zeta\omega_n) + C\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} + \frac{D}{s + \alpha_r}$$

şeklinde olur. Zaman yanıtı ise

$$y(t) = Au(t) + e^{-\zeta\omega_n t}(B\cos\omega_d t + C\sin\omega_d t) + De^{-\alpha_r t}$$

olur. Burada $\alpha_r >> \zeta\omega_n$ ise yani reel kutup kompleks eşlenik kutup çiftinin reel bileşeninden çok çok uzakta ise

- Saf üstel terim hemen sönerek yok olacaktır. Yani zaman cevabı üzerinde reel eksen üzerindeki kutbun etkisi olmayacaktır.

- Ancak α_r, $\zeta\omega_n$'e yakın ise α_r yok ksayılamaz.

Kontrol mühendisliğinde $\alpha_r > 5\zeta\omega_n$ ise α_r yok sayılabilir.

Aşağıdaki sistemler için zaman yanıtlarını bularak davranışlarını yorumlayalım. Bu davranışlar üzerinden hangi sistemler için ikinci mertebeden yaklaşıklığın kabul edilebileceğini belirlemeye çalışalım:

1. $T_1(s) = \frac{24.52}{s^2+4s+24.52}$

   Bu sistem için zaman birim basamak cevabı

   $$y_1(t) = 1 - 1.09e^{-2t}\cos(4.532t - 23.8^\circ)$$

   şeklindedir.

2. $T_2(s) = \frac{245.42}{(s+10)(s^2+4s+245.42)}$ sisteminin birim basamak yanıtı

   $$y_2(t) = 1 - 0.29e^{-10t} - 1.89e^{-2t}\cos(4.532t - 53.34^\circ)$$

   şeklindedir. Bu sistem ikinci mertebeden birsistem olarak ele alınabilir.

3. $T_3(s) = \frac{73.626}{(s+3)(s^2+4s+24.542)}$ sisteminin birim basamak yanıtı

   $$y_3(t) = 1 - 1.11e^{-3t} - 0.707e^{-2t}\cos(4.532t - 78.63^\circ)$$

   şeklindedir. Ancak bu sistem ikinci mertebeden bir sistem olarak ele alınamaz.

Sistem sıfırlarının davranış üzerindeki etkileri

Sıfırlar sadece sistemin genliğini etkiler, sistemin davranış biçimini etkileyen etken sadece sistem kutuplarıdır.

Bu bölümde 2 kutuplu bir sisteme 1 adet sıfır ilave edeceğiz ve bu sıfırın konumuna göre sistem davranışının ne şekilde değiştiğini belirleyeceğiz.

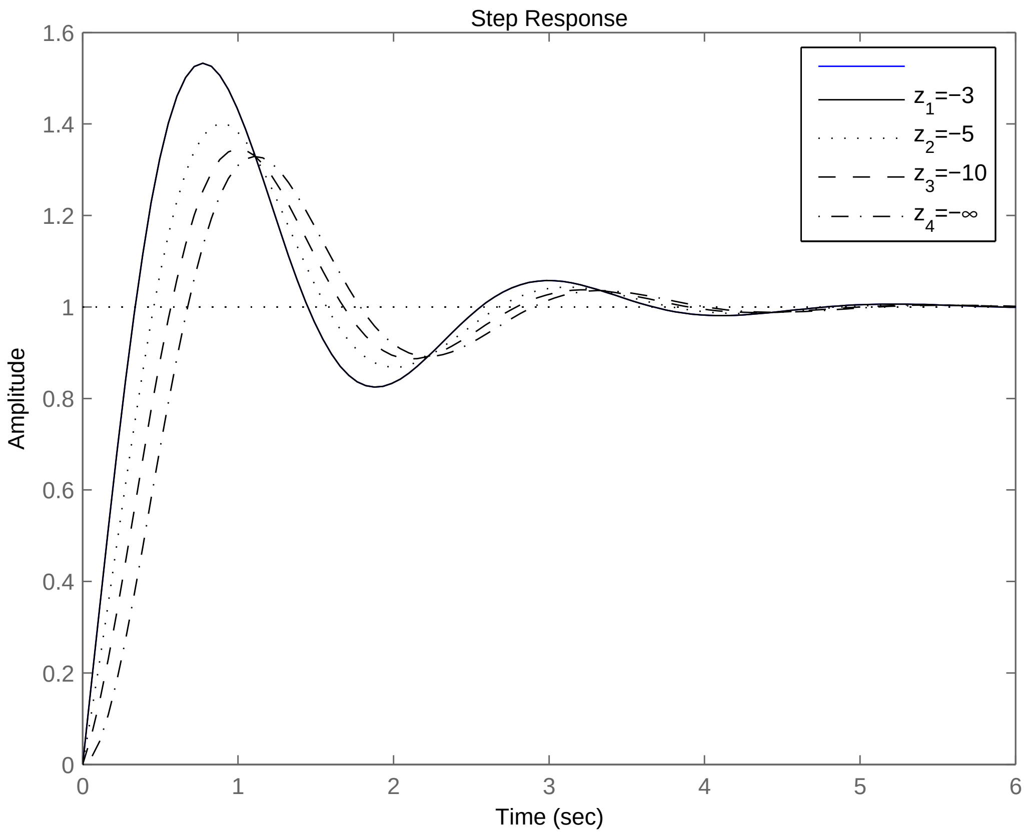
Faraz edelimki sistemimiz

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 8.998}$$

şeklinde verilmiş olsun. Açıktırki sistem kutupları

$$p_{1,2} = -1 \pm j2.828$$

noktalarındadır. Şayet bu sisteme biz $z_1 = -3$, $z_2 = -5$, $z_3 = -10$ ve $z_4 = -\infty$ noktalarında sıfırlar ilave edersek sistem yanıtları şekilde gösterildiği gibi olur(Not: Davranışar kararlı hal değeri 1 olacak şekilde normalize edilmiştir.):



Dikkate edilirse sistem sıfırları reel eksen üzererinde sola doğru kaydırıldıkça davranış sıfır içermeyen ikinci mertebeden sistem davranışına benzemeye başlar.

Sıfır-kutup Silme

3 kutuplu bir sistem ele alalım. Bu sistemin bir kutbu aynı sistemin bir sıfırı tarafından silinmiş olsun. Yani $s = -z$'deki sıfır $s = -p_3$ kutbuna yakın olsun. Sistemimiz

$$T(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p_3)(s^2+as+b)}$$

şeklinde olacaktır. Bu türden sistemlere örnek olarak

$$Y_1(s) = \frac{26.25(s+4)}{s(s+3.5)(s+5)(s+6)}$$

ve

$$Y_2(s) = \frac{26.25(s+4)}{s(s+4.01)(s+5)(s+6)}$$

sistemleri verilebilir.

$Y_1(s)$ kısmi kesirlere ayrıştırılırsa

$$Y_1(s) = \frac{1}{s} - \frac{3.5}{s+5} + \frac{3.5}{s+6} - \frac{1}{s+3.5}$$

şeklinde olur. Dikkat edilirse $(s+3.5)$ kutbuna ait parçanın kazancı 1dir ve diğer kazançların yanında ihmal edilemeyecek kadar büyüktür. Bu durumda sıfır kutup silmesi yapılamaz. Buna karşın

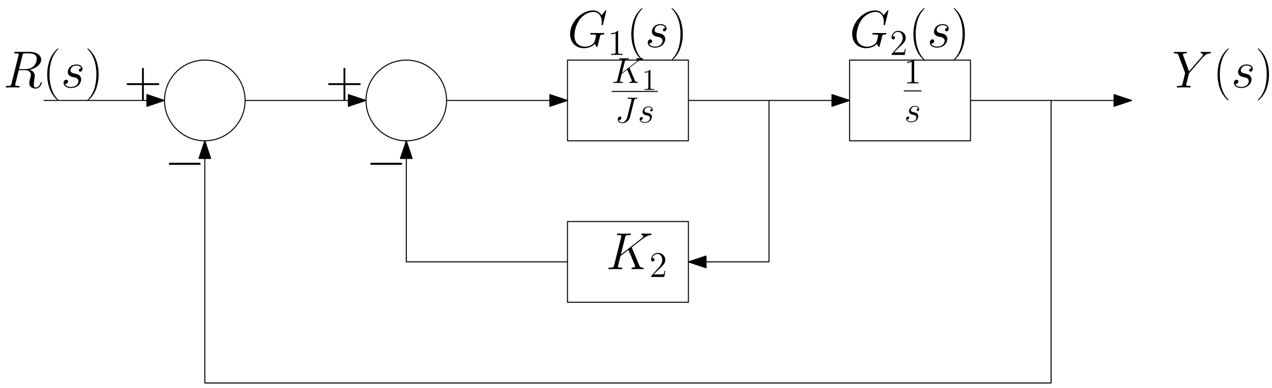
$$Y_2(s) = \frac{0.87}{s} - \frac{5.3}{s+5} + \frac{4.4}{s+6} - \frac{0.033}{s+4.01}$$

kısmi kesirli ifadelerinden $(s+4.01)$ li kutup polinomuna ait parçanın kazancının ihmal edilebilir olduğu görülmektedir. Bu bakımdan 2 nolu sistem

$$Y_2(s) = \frac{26.25}{s(s+5)(s+6)}$$

şeklinde ele alınabilir.

Örnek Aşağıdaki şekilde sistemin birim basamak yanıtının %25 maksimum aşım, $T_p = 2s$ olması için $J = 1kg/m^2$ olduğunda K_1 ve K_2 oransal kontrol kazançlarının ne olması gerektiğini hesaplayalım.



Bunun için giriş çıkış ilişkisini ortaya koyan transfer fonksiyonunu yazalım:

$$Y(s) = G_2G_1(1+G_1K_2)^{-1}\left[1+G_1(1+G_1K_2)^{-1}G_2\right]^{-1}R(s)$$

$$Y(s) = \frac{G_2G_1}{1+G_1K_2+G_1G_2}R(s)$$

$$Y(s) = \frac{K_1}{Js^2+K_1K_2s+K_1}R(s)$$

elde edilir. $J = 1kg/m^2$ olduğundan

$$Y(s) = \frac{K_1}{s^2+K_1K_2s+K_1}R(s)$$

olur. $\omega_n^2 = K_1$ olduğundan $\omega_n = \sqrt{K_1}$ olacaktır. Diğer taraftan $2\zeta\omega_n = K_1K_2$ olmalıdır. Biliyoruz ki

$$\text{Mak. Aşım} = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100$$

dir. Bunun 25 olması için $\zeta = 0.404$ olmalıdır. Diğer taraftan $T_p = \pi/\omega_d = 2$ olması gerektiğinden $\omega_d = 1.57$ şeklinde çözülür. Biliniyor ki $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ dir. Buradan da $\omega_n = 1.72$ olarak hesaplanır. Sonuç olarak tüm bu bulunan ifdelerden $K_1 = 2.95$ ve $K_2 = 0.471$ kazançları hesaplanır.