Genel 2. mertebeden sistemler

Tanım (Doğal frekans (Natural frequency), ω_n) Sönümsüz sistemin osilasyon frekansıdır. Örneğin bir RLC devresinde R sıfır yapıldığında sistemin osilasyon yaptığı frekans gibi.

Tanım (Sönüm oranı (damping ratio), ζ)

$$\zeta = \frac{\text{Sönüm frekansı}}{\text{Doğal frekans}}$$

şeklinde tanımlanır. Örneğin $G(s)$ sistemi,

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Sönüm yoksa, sistem kutupları sanal eksen üzerinde olacak ve sistem çıkışı belli bir frekansta salınacaktır. Kutupların saf imajiner olması için $a = 0$ olmalıdır. Bu durumda $G(s)$,

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + b}$$

şeklini alır. Buradan da sistem kutupları, $s_{1,2} = \pm j\sqrt{b}$ olarak hesaplanır. Sistem girişine $1/s$ şeklinde birim basamak fonksiyonu uygulanırsa sistem çıkış işareti

$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{b}{s^2 + b}$$

buradan da

$$y(t) = 1 - \cos\sqrt{b}t$$

elde edilir. O halde sistem için doğal frekans

$$\omega_n = \sqrt{b}\ \text{[rad/s]}$$

şeklindedir.

Şimdi az sönümlü bir sistem ele alalım:

$$G(s) = \frac{b}{s^2 + as + b}$$

şeklinde olsun. Açıktır ki sistemin kutupları

$$s_{1,2} = \underbrace{-\frac{a}{2}}_{\sigma} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}$$

noktalarındadır. O halde tanım gereği

$$\zeta = \frac{\text{Sönüm frekansı}}{\text{Doğal frekans}} = \frac{|\sigma|}{\omega_n} = \frac{a/2}{\omega_n}$$

dir. Yani $a = 2\zeta\omega_n$ yazılabilir.

Bu durumda en genel halde 2. mertebeden sistem

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

şeklinde ifade edilir.

Örnek

$$G(s) = \frac{36}{s^2 + 4.2s + 36}$$

şeklinde ise bu sisteme ait ζ ve ω_n değerlerini hesaplamaya çalışsalım:

$\omega_n^2 = 36$ olduğundan $\omega_n = 6\,\text{rad/s}$ ve $2\zeta\omega_n = 4.2$ olduğundan $\zeta = 0.35$ şeklinde hesaplanır. ■

En genel anlamda ikinci mertebeden sistem

$$G(s) = \frac{36}{s^2 + 4.2s + 36}$$

şeklinde ise bu sistemin kutupları

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

şeklinde değerler alır.

Sönümsüz bir sistemde $\zeta = 0$ olduğundan sistem kutupları $\pm j\omega_n$ değerlerini alır.

Az sönümlü bir sistemde ζ, $0 < \zeta < 1$ aralığında değişir. Sistem kutupları ise

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

şeklinde değerler alır.

Kritik sönümlü bir sistemde $\zeta = 1$ dir. Bu durumda kutuplar reel eksen üzerinde $-\zeta\omega_n$ olur ve çakışıktır.

Aşırı sönümlü bir sistemde $\zeta > 1$ dir. Bu durumda kökler

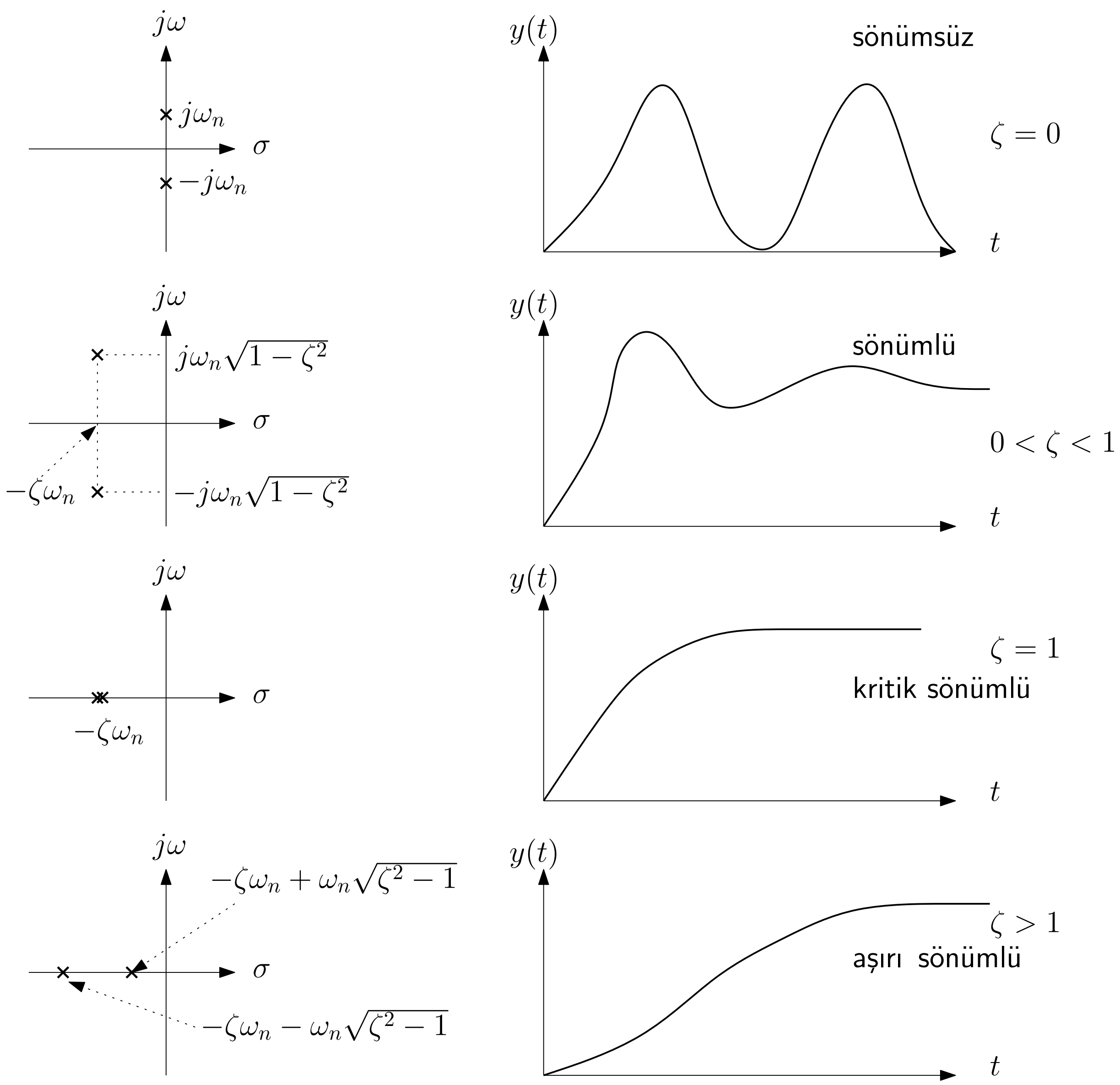
$$-\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

ve

$$-\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

şeklinde reel eksen üzerindedir.

Tüm bu senaryolar aşağıdaki şekilde özetlenmiştir.



Aşağıdaki sistemlerin davranışlarını yorumlamaya çalışalım: Örneğin

$$G(s) = \frac{12}{s^2 + 8s + 12}$$

şeklinde ise, bu sistemde $\omega_n = \sqrt{12}$, $2\zeta\sqrt{12} = 8$ olduğundan $\zeta = 1.55$ şeklindedir. Bu durumda sistem aşırı sönümlü bir davranış sergiler.

Bir diğer örnek sistem

$$G(s) = \frac{16}{s^2 + 8s + 16}$$

şeklinde ele alınırsa, bu sistem için $\omega_n = 4$, $\zeta = 1$ dir. Yani sistem basamak şeklindeki girişlere kritik sönümlü bir yanıt verir.

Az Sönümlü 2. Mertebeden Sistemler

Bu bölümde 2. mertebeden az sönümlü sistemlerin basamak yanıtlarını inceleyeceğiz: Farz edelimki sistemimiz

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

şeklinde olsun. Bu sistemin girişine uygulanması gereken işaret $U(s) = \frac{1}{s}$ olacaktır. Sistem çıkış işareti ise

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2)}$$

şeklinde olur. Bu ifade kısmi kesirlere ayrıştırılırsa

$$Y(s) = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2 s + K_3}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}$$

elde edilir. Burada az sönümlü bir sistem için $\zeta < 1$ olduğu unutulamamalıdır. Öncelikle K_1, K_2 ve K_3'ü hesaplayalım: Açıktır ki

$$K_1(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2) + (K_2 s + K_3)s = \omega_n^2$$

yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(K_1 + K_2)s^2 + (2K_1\zeta\omega_n + K_3)s + K_1\omega_n^2 = \omega_n^2$$

elde edilir. Buradan da kolaylıkla

$$K_1 + K_2 = 0$$

$$K_1 = 1$$

$$K_2 = -1$$

ve

$$K_3 = 2K_1\zeta\omega_n = 2\zeta\omega_n$$

elde edilir.

Bu durumda

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

yazılabilir. Burada eşitliğin sağ tarafındaki ikinci terim cos ve sin li terimler içermelidir. Bunun için bu terimi

$$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2} + \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

biçinde yazmalıyız. Bunu yaparsak

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \left[\underbrace{\frac{s + \zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)}}_{e^{-\zeta\omega_n}\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2})} + \underbrace{\frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)}}_{= \frac{\zeta\omega_n \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_n^2(1-\zeta^2)}} \right]$$

elde edilir.

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \left[\frac{s + \zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)} \right]$$

Buradan da kolaylıkla

$$y(t) = 1 - \left[e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t) \right]$$

yazılabilir. Burada

$$\boxed{A\cos\theta + B\sin\theta = C\cos(\theta - \phi) \qquad C = \sqrt{A^2 + B^2},\ \phi = \tan^{-1}\frac{B}{A}}$$

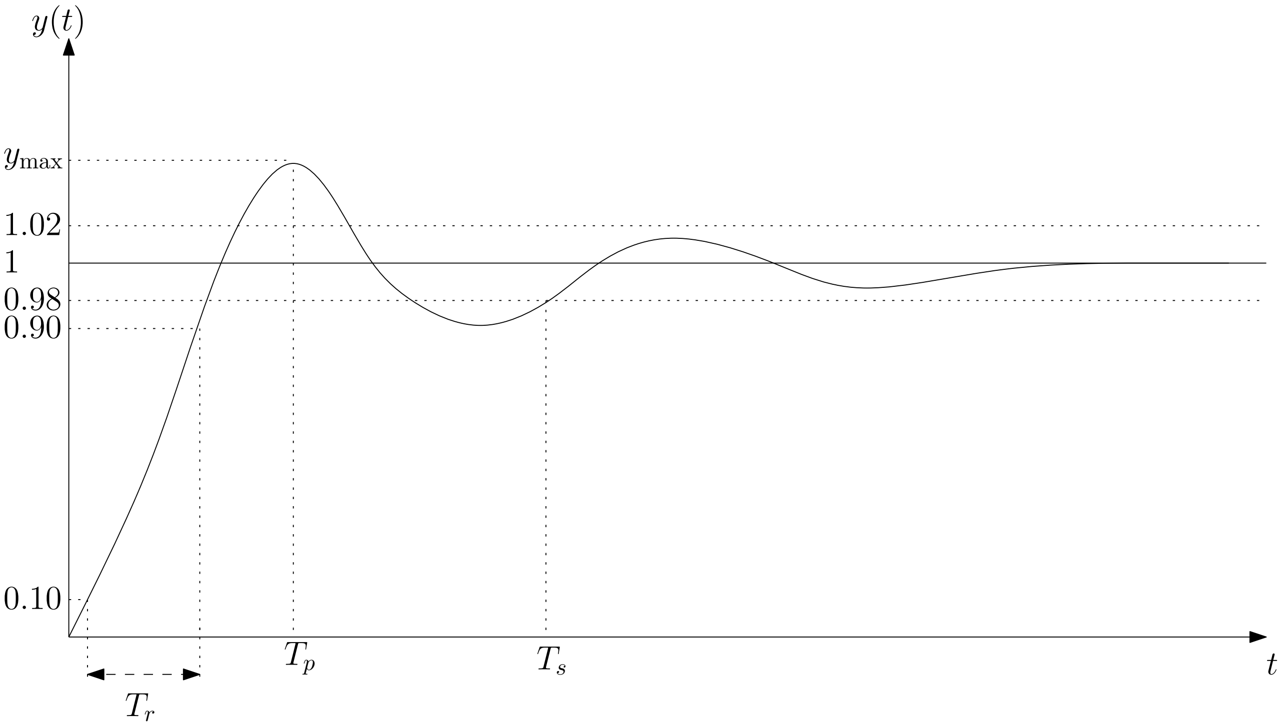
özelliği kullanılırsa

$$\boxed{y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cos(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t - \phi) \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)}$$

elde edilir.

En büyük aşım zamanı, Yerleşme ve Yükselme zamanları

Bu zaman değerlerinin hesabı esnasında aşağıdaki grafikten yararlanacağız:



Burada T_p en büyük aşımın (y_{max}) olduğu zamanı göstermektedir. T_s yerleşme zamanıdır ve zaman cevabının, referans değerin %2 lik bandına hiç çıkmamak üzere ilk girdiği zamanı gösterir.

T_p hesaplanması

T_p, $y(t)$ nin eğiminin sıfıra eşitolduğu ilk zaman noktasıdır. Bunun için $y(t)$'nin türevinin alınması ve sıfıra eşitlenerek zamanın çekilmesi gerekir.

$$\mathcal{L}\{\dot{y}\} = sY(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2} = \frac{\omega_n \omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)}$$

$$= \frac{\omega_n \omega_n \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\sqrt{1-\zeta^2}}}{(s+\zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1-\zeta^2)}$$

Buradan da kolaylıkla

$$\dot{y}(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t\right)$$

elde edilir. Açıktırki $\dot{y}(t) = 0$ ancak ve ancak sinüslü terimin içi $(n\pi \mid n = 0, 1, 2, \ldots)$ olduğunda sağlanır. Yani

$$\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, t = n\pi$$

olmalıdır. $n = 0$ $t = 0$'a karşı düşeceğinden tepe noktası için $n = 1$ olmalıdır. Bu durumda T_p zamanı

$$\boxed{T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}}$$

şeklinde bulunur. ■

%Aşım ($\%OS$)

$$\%OS = \frac{y_{\text{max}} - y_{\text{final}}}{y_{\text{final}}} \times 100$$

Bu durumda %Aşım değerinin hesaplanabilmesi için tepe değerin hesaplanması gerekir. Bunun içinde

$$y_{\text{max}} = y(T_p) = y\left(\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

hesaplanmalıdır.

Bilindiği gibi $y(t)$,

$$y(t) = 1 - \left[e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}t) \right]$$

yazılabilir. Burada $t = T_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ kullanılırsa,

$$y_{\text{max}} = y(T_p) = 1 - e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \left[\cos(\pi) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\pi) \right]$$

elde edilir. Buradan da kolaylıkla

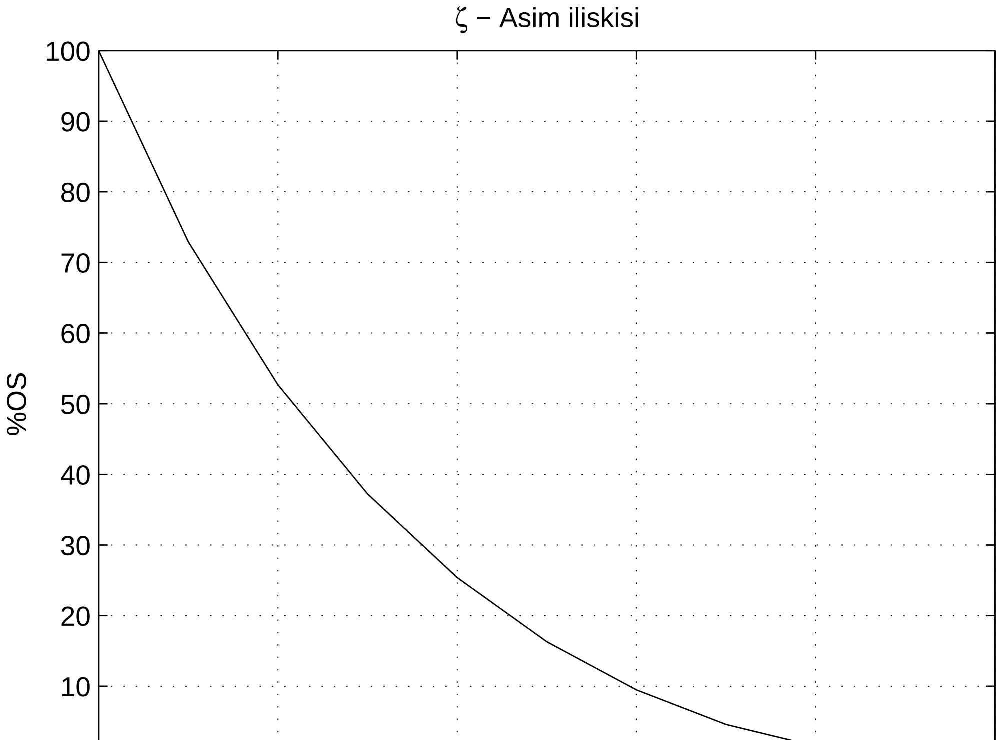
$$y_{\text{max}} = 1 + e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

elde edilir. $y_{\text{final}} = 1$ olduğundan

$$\boxed{\%OS = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100}$$

olur.

ζ ile Aşım arasındaki ilişki aşağıdaki grafikte gösterilmiştir:



T_s **yerleşme zamanı (settling time)** T_s zaman cevabının referans değerin %2'lik bandına hiç çıkmamak üzere girdiği noktadır. Açıktırki sinüsodial bileşenin genliği

$$e^{-\zeta\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

olduğundan

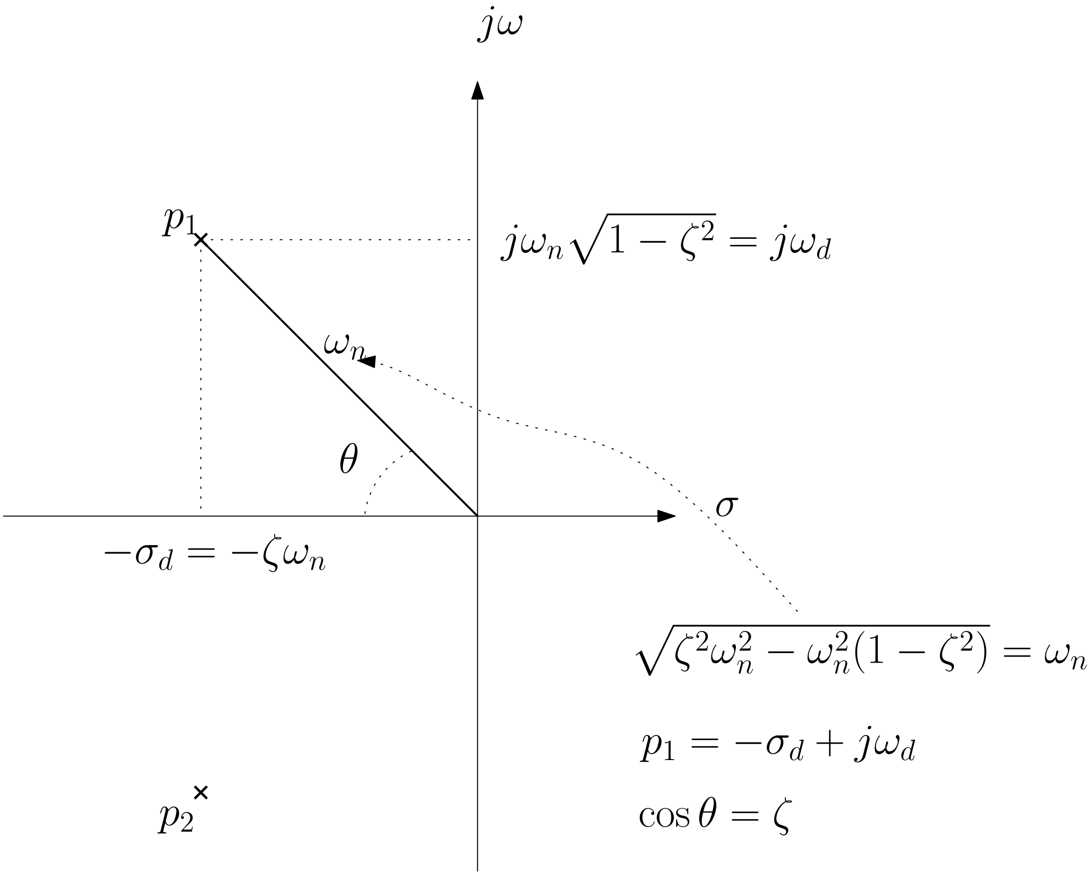
$$e^{-\zeta\omega_n t}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 0.02$$

olmalıdır. Buradan zaman t çözülürse

$$\boxed{T_s = \frac{-\ln\left(0.02\sqrt{1-\zeta^2}\right)}{\zeta\omega_n} \approx \frac{4}{\zeta\omega_n}}$$

elde edilir.

Şimdi elimizdeki verileri (En büyük aşım zamanı, yerleşme zamanı, % aşım) sistem kutupları ile ilişkilendirmeye çalışalım:



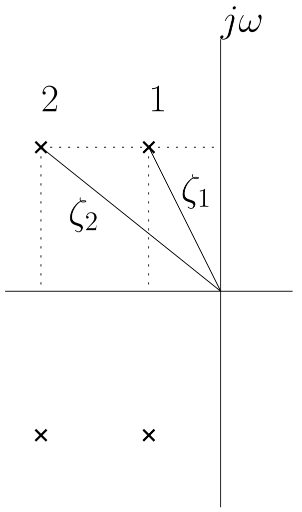
Bu durumda

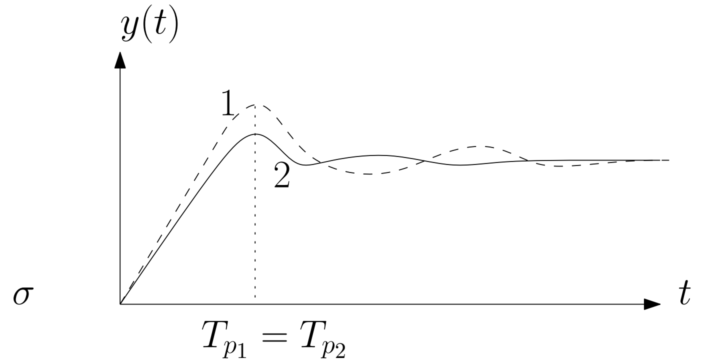
$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d},$$

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma_d}$$

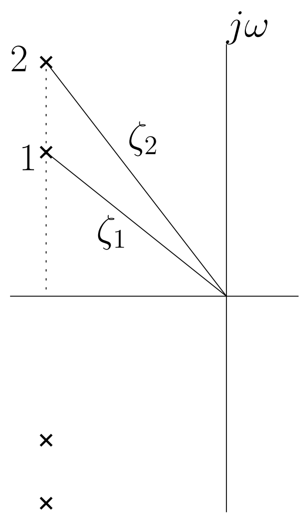
olur.

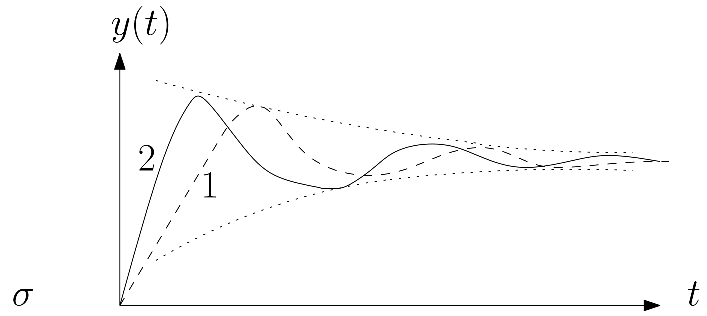
Görüldüğü gibi T_p, ω_d ile ters orantılıdır. Benzer şekilde T_s de, σ_d ile ters orantılıdır. Bu bakımdan değişik kutup yerleşimleri değişik zaman cevaplarına neden olur.



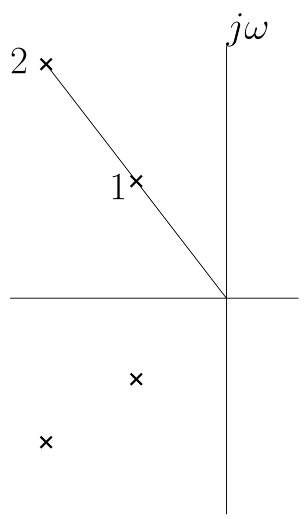


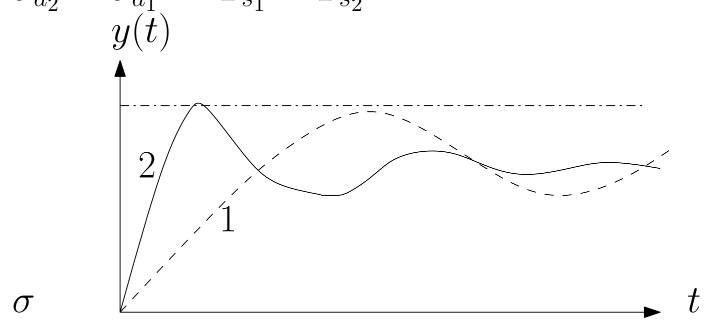
$$\zeta_2 > \zeta_1 \to \%OS_2 < \%OS_1$$
$$\omega_{d_1} = \omega_{d_2} \to T_{p_1} = T_{p_2}$$
$$\sigma_{d_2} > \sigma_{d_1} \to T_{s_2} < T_{s_1}$$





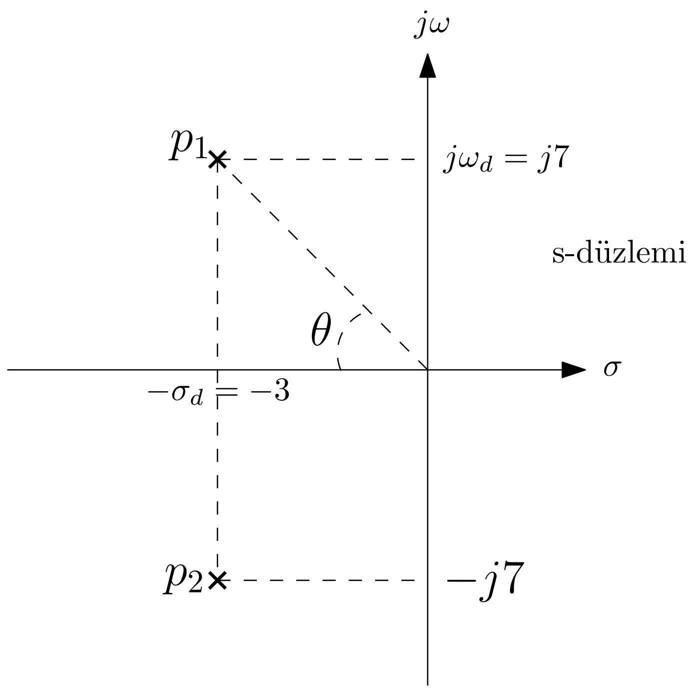
$$\zeta_1 > \zeta_2 \to \%OS_1 < \%OS_2$$
$$\omega_{d_1} < \omega_{d_2} \to T_{p_1} > T_{p_2}$$
$$\sigma_{d_2} = \sigma_{d_1} \to T_{s_1} = T_{s_2}$$





$$\zeta_1 = \zeta_2 \to \%OS_1 = \%OS_2$$
$$\omega_{d_1} < \omega_{d_2} \to T_{p_1} > T_{p_2}$$
$$\sigma_{d_2} > \sigma_{d_1} \to T_{s_1} > T_{s_2}$$

Örnek Aşğıdaki grafikte kutup yerleşimi gösterilen ikinci mertebeden sistem için ζ, ω_n, T_p, T_s ve %OS değerlerini hesaplamaya çalışsalım.



$$\zeta = \cos\theta = \cos(\tan^{-1}(7/3)) = 0.394$$

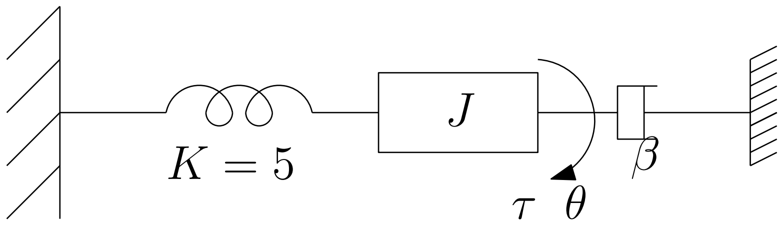
$$\omega_n = \sqrt{7^2 + 3^2} = 7.616$$

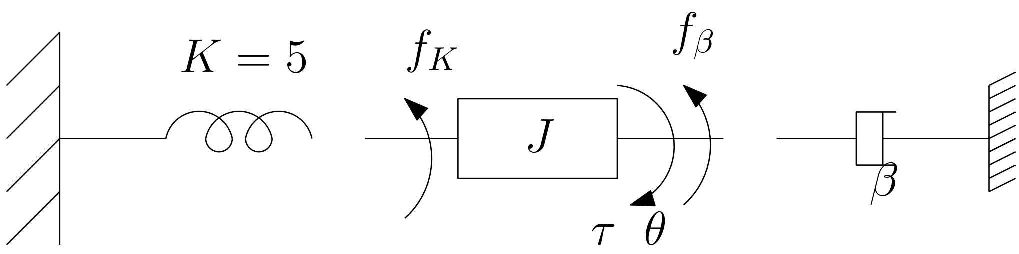
$$T_p = \pi/\omega_d = \pi/7 = 0.449s.$$

$$\%OS = e^{-\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100 = \%26$$

$$T_s = 4/\sigma_d = 4/3 = 1.333s.$$

Örnek Aşağıdaki şekli verilen sistem için sistem girişine $\tau(t)$, şeklinde birim basamak fonksiyonu uygulanırsa, J ve β nasıl seçilirse sistem yanıtı $\theta(t)$, %20 aşım ve $T_s = 2sn.$ yapısında olur.





serbest cisim diyagramı

Bunun için önce serbest cisim diyagramı çizilirse, yukarıdaki şekilde gösterilmiş yapı elde edilir. Buna göre sistem diferansiyel denklemi

$$J\theta'' = \tau - f_K - f_\beta$$

$$J\theta'' = \tau - K\theta - \beta\theta'$$

$$s^2 J\theta(s) = \tau(s) - K\theta(s) - \beta s\theta(s)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da sistem transfer fonksiyonu

$$\frac{\theta(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{Js^2 + s\beta + K} = \frac{1/J}{s^2 + \beta/Js + K/J}$$

Açıktır ki $\omega_n = \sqrt{K/J}$ şeklindedir. Ayrıca $2\zeta\omega_n = \beta/J$ şeklindedir. $T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 2$ olabilmesi için $\zeta = 4/2\omega_n = 2\sqrt{J/K}$ olmalıdır. Diğer taraftan %20'lik aşım için $\zeta = 0.456$ bulunur. Bunun için $J/K = 0.052$ olmalıdır. $K = 5$ olduğundan $J = 0.26\text{kgm}^2$ olarak hesaplanır. ■