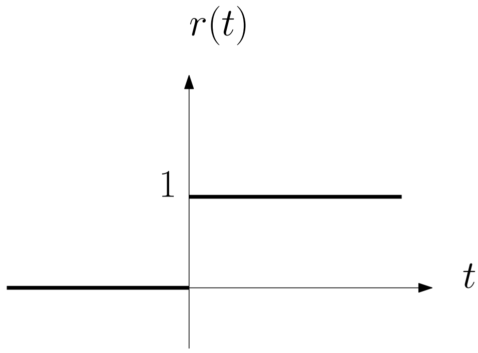
Kararlı Hal Hataları

Kontrol Sistemlerinin tasarımında 3 önemli kriter mevcuttur. Bunlar geçici rejim cevabı, kararlılık ve kararlı hal yanıtıdır. Bu bölümde kararlı ha yanıtlarının özelliklerini inceleyeceğiz.

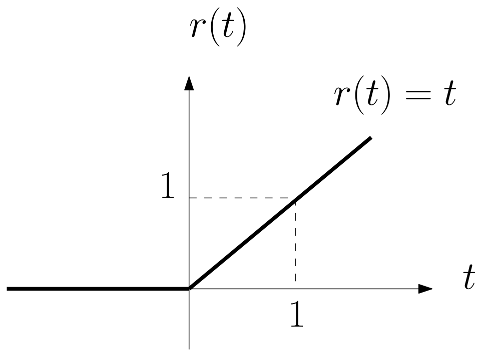
Kararlı hal hatası, zaman sonsuza yaklaşırken ($t \to \infty$), önceden belirlenmiş giriş işareti ile çıkış işsaretinin farkıdır.

Kararlı hal hatasının varlığını test etmede kullanılan bazı önemli işaretler şunlardır:



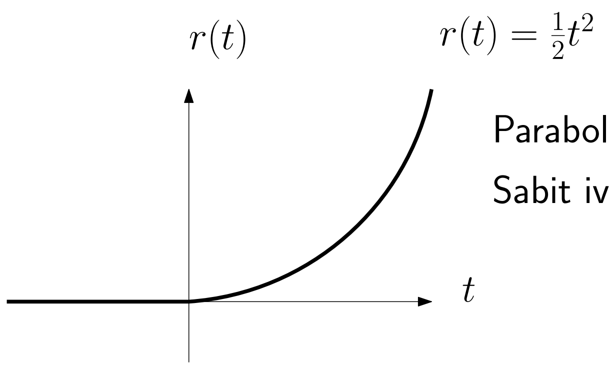
basamak fonksiyonu

sabit pozisyon sinyali



Rampa fonksiyonu

Sabit hız sinyali



Parabol fonksiyon

Sabit ivme sinyal

Bu test işaretleri şu şekilde kullanılır:

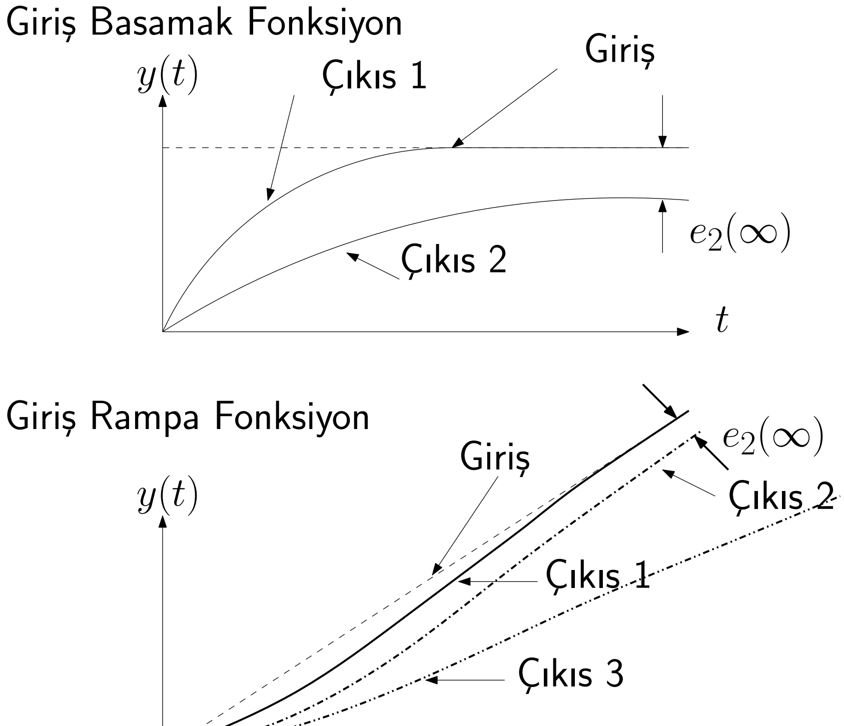
Örneğin bir pozisyon kntrol sistemini göz önüne alalım. Sistem çıkış işareti pozisyon ise sistem referans girişi de pozisyon olmalıdır. Basamak giriş bu durumda sistem çıkış işaretinin gitmesini istediğimiz pozisyonu gösterir. Örneğin anten konumlama veya radar açısı kontrol sistemlerinde bu tür bir yapı kullanılır.

Rampa şeklinde bir pozisyon sinyali sistemimize uygulanırsa ve sistemin bu işareti hatasız izlemsi istenirse sistem bu durumda sabit hız kontrolünü de yerine etirmiş olur.

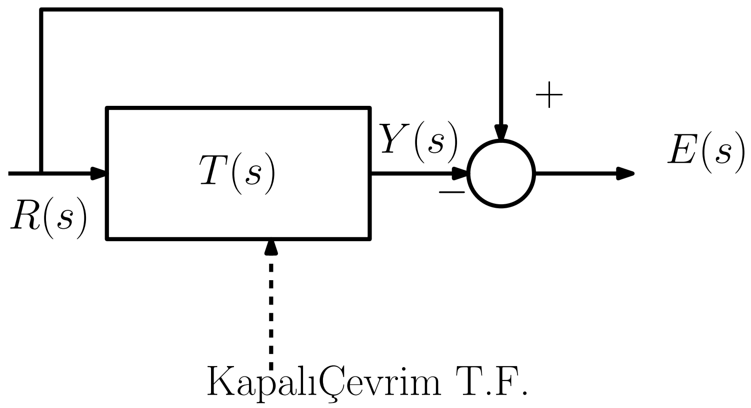
Benzer şekilde sistemin girişine parabolik bir pozisyon işareti uygulanırsa sistem çıkıı bu pozisyon işaretini hatasız izleyebiliyorsa sistem aslında sabit ivmeli bir işareti de izleyebilir denir. İvme kontrolü genellikle ulaşım sistemlerinde, yüksek hızlı asansör sistemlerinde kullanılır. Zira değişken ivme insan vücudu üzerinde rahatsızlık yaratır.

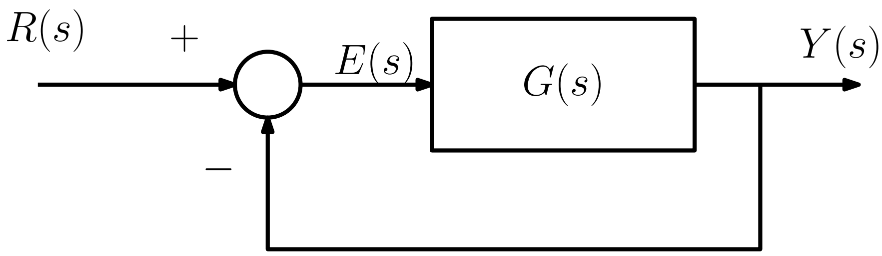
NOT: Kararlı hal hatası tanımı sadece kararlı sistemler için geçerlidir. Bu bakımdan kararlı hal yanıtı analizi yapmadan önce mutlaka kapalı çevrim sistemin kararlılığı test edilmelidir.

Örnek KararlıHal Hataları



Blok diyagramlar üzerinde $e(t)$ hata işaretinin elde edilmesi

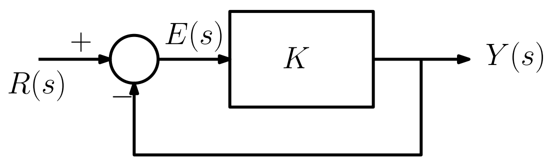




Şimdi aşağıdaki şekilde gösterilen birim geri beslemeli basit kapalı çevrim kontrol sistemini göz önüne alalım: Açıktır ki burada hata işareti $E(s) = R(s) - Y(s)$ şeklindedir. $R(s)$ sıfırdan farklı sabir birişaret ise, sabit bir sonlu K kazancı ile hata asla sıfırlanamaz. Her zaman küçük bir hata mevcut olur. Zira $Y(s) = KE(s)$ olduğundan $E(s) = R(s) - KE(s)$ olur. buradan da kolaylıkla

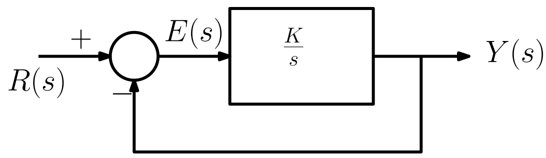
$$E(s) = \frac{1}{1+K} R(s)$$

olarak hesaplanır. Yani sonlu bir K ile hata sıfırlanamamaktadır. K ne kadar büyürse hata o derece azalır. Ancak K kazancının çok arttırılması kapalı çevrim sistemin kararlılığını bozar.



Şimdi aynı blok diyagram üzerinde ileri yol transfer fonksiyonuna integratör ilave edelim. Bu durumda hata işareti $e(t) = r(t) - y(t)$ olur. Ancak $y(t)$ aslında $e(t)$ hata işaretinin entegralidir. $y(t)$ büyüdükçe $e(t)$ azalır. İntegral de giderek belli bir değere yakınsar. Bu değer aslında $r(t)$ dir. Hata sıfır olsa dahi sistem çıkışı asla sıfır olmaz. Zira sıfırın integrali sabit bir sayıdır.

Örnek olarak bir motor iyi bir integratör sistemidir. Motor çıkışı açısal konum ise, dönen bir motorun giriş gerilimi sıfırlansa dahi çıkış pozisyonu sabit bir knumda kalır. Başlangıç konumuna geri dönmez. Bu bakımdan basamak girişe ileri yolunda integratör içeren sistem, sıfır kararlı hal hatası verir.

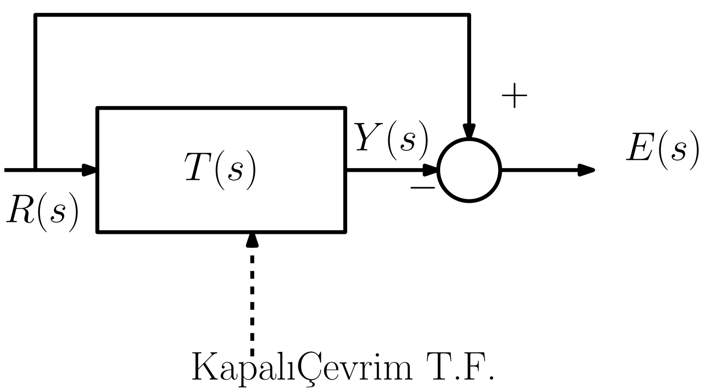


Kararlı hal hatasının tespiti genellikle 2 yöntem ile yapılabilir. Bunlar

- Kapalı çevrim transfer fonksiyonu $T(s)$ hesaplanır ve sistem giriş işaretindn, sistem çıkış işareti çıkartılır. Elde edilen işaret $e(t)$ hata işaretidir. Daha sonra t limitle sonsuza götürülerek kararlı hal hatası belirlenir.

- Bir diğer yöntem ise Açık çevrim transfer fonksiyonu olan $G(s)$'i kullanmaktır. Bu yöntemde kapalı çevrim transfer fonksiyonunun belirlenmesine gerek yoktur. Bu yöntem kontrolör tasarımına yatkın bir yöntemdir.

Kapalı çevrim transfer fonksiyonu üzerinden kararlı hal hatası tespiti



Açıktır ki

$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan $Y(s) = T(s)R(s)$ şeklindedir. Bu durumda hata işareti Laplace tanım bölgesinde

$$E(s) = [1 + T(s)]R(s)$$

şeklinde bulunur. O halde herhangi bir t anı için hata işaretinin değeri

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{[1 + T(s)]R(s)\right\}$$

şeklinde bulunabilir. Kararlı hal hatası ise

$$e(\infty) = \lim_{t\to\infty} \mathcal{L}^{-1}\left\{[1 + T(s)]R(s)\right\}$$

Ancak son değer teoremi ile ters Laplace dönüşümü bulunmadan da kararlı hal hata değeri hesaplanabilir.

Bir zaman fonksiyonunun son değeri Laplace tanım bögesinde son değer teoremi ile hesaplanır.

Son değer teoremi gereğince kararlı bir rasyonel f fonksiyonunun son değeri

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

şeklinde hesaplanır. Burada f fonksiyonunun kararlı olması gerektiği unutulmamalıdır. f fonksiyonunun kararlılığı için tüm kutuplarının sol yarı s-düzleminde bulunması gerekir. Ancak orjinde 1 adet kutup bulunması kararlılığı bozmaz.

Teoremin ispatına gelince:

$$\mathcal{L}\{\dot{f}(t)\} = \int_0^\infty \dot{f}(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = sF(s) - f(0)$$

olduğu açıktır. Şimdi

$$\lim_{s\to 0}\int_0^\infty \dot{f}(t)dt = \lim_{s\to 0} sF(s) - f(0)$$

yazılabilir. Buradan da

$$f(\infty) - \cancel{f(0)} = \lim_{s\to 0} sF(s) - \cancel{f(0)}$$

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

şeklinde bulunur.

Örnek $T(s)$ bir sisteme ait kapalı çevrim transfer fonksiyonu olsun ve

$$T(s) = \frac{5}{s^2 + 7s + 10}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Sistem girişi birim basamak şeklinde değişen bir giriş ise kararlı hal hatasını bulmaya çalışalım. Açıktırki

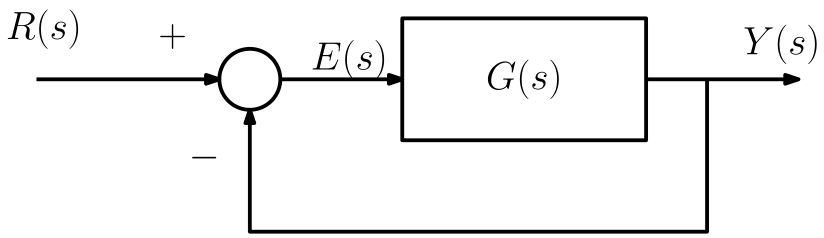
$$E(s) = R(s) - Y(s) = R(s) - T(s)R(s) = R(s)[1 - T(s)]$$

yazılabilir. Son değer teoremi gereğince

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} sE(s) = \lim_{s \to 0} s\frac{1}{s}\left[1 - \frac{5}{s^2 + 7s + 10}\right] = 0.5$$

olarak elde edilir. ■

Çoğu sistem birim geri beslemeli formda ifade edilebilir. Bu sonuçtan yola çıkarak biz kapalı çevrim transfer fonksiyonlarını hesaplamadan direkt ileri yol transfer fonksiyonlrı cisinden de sistemlerin kararlı hal hatalarını hesaplayabiliriz:



yapısını ele alalım. Açıktır ki

$$E(s) = \frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

yazılabilir. Şayet bu rasyonel fonksiyon kararlı ise son değer teoremi gereğince

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} s\frac{R(s)}{1 + G(s)}$$

yazılabilir. Şimdi biz burada $R(s)$ girişine değişik girişler uygulayarak kararlı hal hatasının durumunu inceleyeceğiz ve $G(s)$ ile $e(\infty)$ arasındaki ilişkiyi ortaya koyacağız.

Giriş basamak (step) fonskiyonu olursa:

Bu durumda $R(s) = 1/s$ olur.

$$e(\infty) = e_{\text{step}}(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s 1/s}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} G(s)}$$

elde edilir. Burada $e(\infty)$ nin sıfır olabilmesi için $s \to 0$ olduğunda yukarıdaki ifadenin paydası ∞ olmalıdır. Bu ancak $G(s)$'in $s = 0$ da **bir veya daha fazla sayıda saf kutbu** olması durumunda mümkündür. Yani

$$G(s) = \frac{(s+_1)(s + z_2)\cdots}{s^n (s + p_1)(s + p_2)\cdots} \qquad n \geq 1$$

ise $e(\infty) = 0$ olur. Şayet $n = 0$ olursa

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{(s+_1)(s + z_2)\cdots}{(s + p_1)(s + p_2)\cdots} = \frac{z_1 z_2 \cdots}{p_1 p_2 \cdots}$$

şeklinde sonlu bir değer elde edilir.

Giriş rampa (ramp) fonskiyonu olursa: Bu durumda $R(s) = \frac{1}{s^2}$ olur. Kararlı hal hatası ise

$$e(\infty) = e_{\text{ramp}}(\infty) = \lim_{s \to 0} \frac{s \frac{1}{s^2}}{1 + G(s)} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s + sG(s)} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} sG(s)}$$

elde edilir. Sıfır kararlı hal hatası için koşul

$$\lim_{s \to \infty} sG(s) = \infty$$

olmasıdır. Bunun için ise

$$G(s) = \frac{(s+_1)(s + z_2)\cdots}{s^n (s + p_1)(s + p_2)\cdots} \qquad n \geq 2$$

olmalıdır.

Giriş parabolik fonskiyonu olursa:

Bu durumda $R(s) = 1/s^3$ olur. Kararlı hal hatası ise

$$e(\infty) = e_{\text{parabolik}}(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{s\frac{1}{s^3}}{1+G(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2+s^2G(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2G(s)}$$

şeklinde elde edilir. Sıfır kararlı hal hatası için

$$G(s) = \frac{(s+_1)(s+z_2)\cdots}{s^n(s+p_1)(s+p_2)\cdots} \qquad n \geq 3$$

olması gerektiği açıkça görülmektedir.

Örnek Birim geri beslemeli bir sistemde ileri yol transfer fonksiyonunun değeri

$$G(s) = \frac{120(s+2)}{(s+3)(s+4)}$$

ise girişler sırası ile $r(t) = 5u(t)$, $r(t) = 5tu(t)$ ve $r(t) = 5t^2u(t)$ olduğunda kararlı hal hata değerlerini hesaplamaya çalışalım.

Öncelikle K.Ç sistemin kararlı olup olmadığı sorgulanmalıdır. Kontrol edilirse K.Ç. sistemin kararlı olduğu görülür. Öncelikle giriş $r(t) = 5u(t)$ şeklinde olsun. Bu durumda $R(s) = 5/s$ olacaktır. Kararlı hal hatası ise

$$e(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{5}{1+G(s)} = \frac{5}{1+\lim_{s\to 0} G(s)} = \frac{5}{1+20} = \frac{5}{21}$$

olarak elde edilir.

Şayet giriş rampa ise ve fonskiyon $5tu(t)$, $t \geq 0$ ise $R(s) = 5/s^2$ olur. Bu durumda

$$e(\infty) = \frac{5}{\lim_{s\to 0} sG(s)} = \frac{5}{0} = \infty$$

olur.

Giriş $r(t) = 5t^2u(t)$ yani $R(s) = 10/s^3$ olursa k.h. hatası $R(s) = 5/s^2$ olur. Bu durumda

$$e(\infty) = \frac{10}{\lim_{s\to 0} s^2G(s)} = \frac{10}{0} = \infty$$

olur.

Statik hata sabitleri ve Sistem Tipi Tanımı

Bir önceki bölümde bulduğumuz sonuçlara dayanarak şayet sistem girişi $r(t)$ birim basamak şeklinde değişen bir giriş ise

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + \lim_{s\to 0} G(s)}$$

şeklinde hesaplanmaktaydı. Burada şu tanımlamayı yaparsak

$$K_p \triangleq \lim_{s\to 0} G(s)$$

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + K_p}$$

olur. Burada K_p **pozisyon sabiti** olarak adlandırılır. Benzer şekilde giriş birim rampa olursa k.h.hatası

$$e(\infty) = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG(s)}$$

elde edilir. Şayet burada

$$K_v \triangleq \lim_{s\to 0} sG(s)$$

tanımlaması yapılırsa k.h.hatası

$$e(\infty) = \frac{1}{K_v}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada K_v **hız sabiti** olarak adlandırılır.

Son olarak sistem girişi parabolik bir fonskiyon ise $R(s) = 1/s^3$ our ve k.h. hatası

$$e(\infty) = \frac{1}{\lim_{s\to 0} s^2 G(s)}$$

şeklinde bulunur. Burada

$$K_a \triangleq \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$$

tanımlaması yapılırsa k.h.hatası

$$e(\infty) = \frac{1}{K_a}$$

yazılabilir. Burada K_a **ivme sabiti** olarak adlandırılır.

Birim geri beslemeli bir sistemde ileri yol transfer fonskiyonu

$$G(s) = \frac{500(s+2)(s+5)}{(s+8)(s+10)(s+12)}$$

şeklinde ise sistem girişine birim basamak, birim rampa ve parabolik işaretler uygulanması durumunda kararlı hal hata değerini hesaplamaya çalışalım:

Açıktır ki, $K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = 5.208$, $K_v = 0$ ve $K_a = 0$ olduğundan birim basamak giriş için kararlı hal hata değeri $e(\infty) = 1/(1 + K_p) = 0.161$ olur. Buna karşın birim rampa ve birim parabol girişler için kararlı hal hata değerleri ∞ olur.