

## Ders #5 Elektro-mekanik sistemlerin modellenmesi

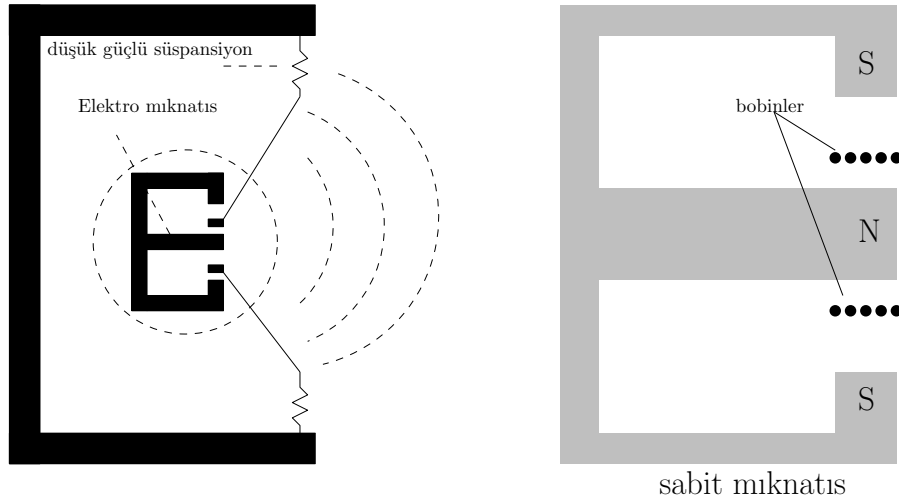
Elektromekanik sistemlerin dinamik davranışlarının analizi için elektrik alan teorisi ve manyetik alan teorisinden faydalanılır.

$l$  [m] uzunluğundaki bir iletken  $i$  [A] akımı akarsa ve bu iletken  $B$  [tesla] manyetik alanına  $\theta$  açısı ile maruz kalırsa, bu durumda  $i - B$  düzlemine dik açıda iletkene

$$F = Bli \sin \theta \text{ [Newton]}$$

kuvveti etki eder. Bu denklem elektrik enerjisinin mekanik enerjiye dönüşümünün temelini oluşturur ve motor kanunu olarak bilinir. Şimdi bu denklemden yararlanarak basit modellemeler yapalım:

**Örnek:** Şekildeki hoparlör sistemini ele alalım:



İletkenlerden akan akımlar  $B$  manyetik alanı içerisinde bulduklarından, bobinler üzerinde manyetik kuvvet etkili olur. Bu kuvvet ise ses bobinlerinin titreşimine neden olarak ses üretir.

Şimdi farz edelimki, koninin kütlesi  $M$ , sürtünme katsayısı  $b$  olsun. Ayrıca  $B = 0.5$  Tesla olsun. Bobin ise 20 dönüşlü olsun ve tel çapı 2cm olsun. Bu durumda manyetik kuvvetin etki ettiği iletken uzunluğu

$$l = 20 \times \frac{2\pi}{100} = 1.26 \text{ m,}$$

olarak hesaplanır. Etkili olan kuvvet ise

$$F = 0.5 \times 1.26 \times i = 0.63i \text{ Newton}$$

olur. Bu durumda sistem dinamik denklemini,  $i$  akımı giriş,  $x$  bobinin yer değiştirmesi olmak üzere

$$M\ddot{x} + b\dot{x} = 0.63i$$

şeklinde yazılabilir.

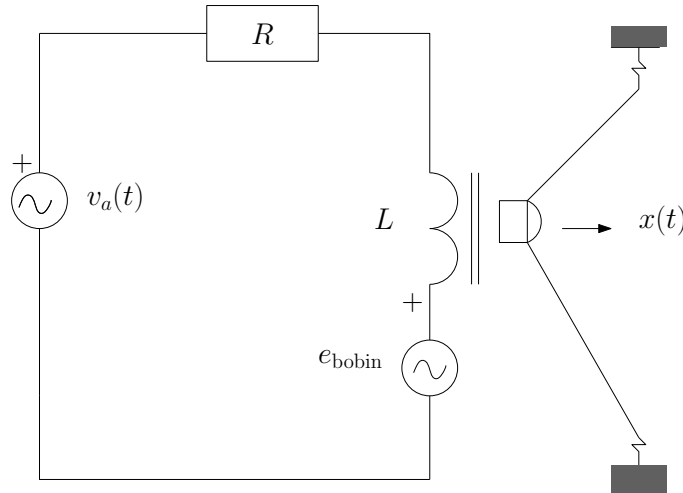
Diğer taraftan,  $l$  uzunluğundaki bir iletken  $B$  manyetik alanına göre  $\theta$  açısı ile,  $v[m/s^2]$  hızında hareket ederse iletken uçları arasında

$$e(t) = Blv \sin \theta \text{ Volt}$$

gerilim endüklendir. Şimdi hoparlör sistemimize geri dönelim. Açıkta ki bobinler hareket edince, uçları arasında

$$e_{\text{bobin}} = Bl\dot{x} = 0.63\dot{x}$$

büyükliğünde gerilim endüklenecektir. İşte bu endüklenen gerilimi de içine alan devre aşağıdaki gibidir.



Devre denklemleri

$$L \frac{di}{dt} + Ri = v_a - 0.63\dot{x}$$

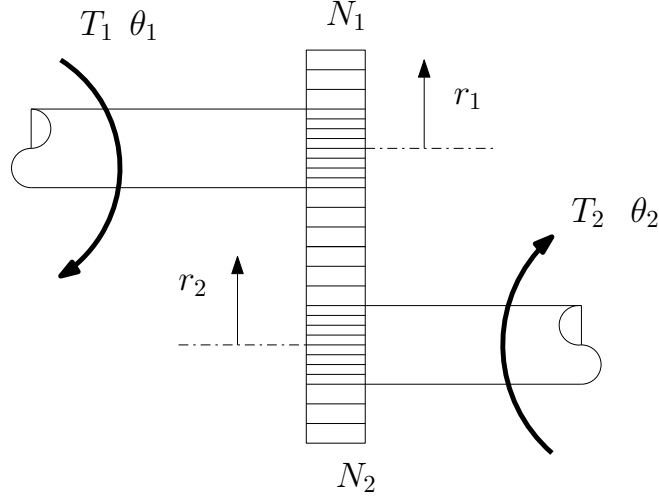
şeklinde olacaktır. Her iki denklemden akım elimine edilirse

$$\frac{X(s)}{V_a(s)} = \frac{0.63}{s[(Ms + b)(Ls + R) + (0.63)^2]}$$

şeklinde bulunur.

## Dişli takımları

Genel olarak bir dişli takımı yapısı şekildeki gibidir.



Şu değerlendirmeler dişlilere ait denklemlerin çıkartılmasında yardımcı olur:

1. Yarı çapla diş sayısı orantılıdır.

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

2. Dişlilerin yüzey boyunca katettikleri yollar eşittir.

$$r_1\theta_1 = r_2\theta_2$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

3. Dişlilerin kayıpsız oldukları varsayımı altında, her iki dişlide de yapılan işler eşittir.

$$T_1\theta_1 = T_2\theta_2$$

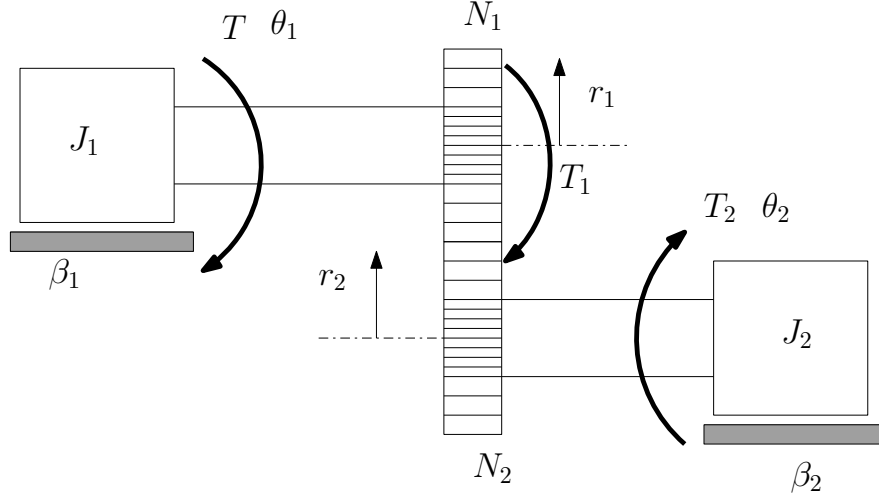
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1}$$

Bu sonuçlar birleştirilirse

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

elde edilir.

Pratikte, dişli takımlarının s¼rt¼nmesi ve eylemsizlikleri oldukça büyüktür. Bu bakımdan hesaplamalara katılmaları gerekmektedir. Bu durumda mevcut çizim



şeklinde ele alınabilir. Bu durumda dinamik denklemler

$$T(t) = J_1\theta_1''(t) + \beta_1\theta_1'(t) + T_1(t)$$

$$T_2(t) = J_2\theta_2''(t) + \beta_2\theta_2'(t)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca  $T_1 = \frac{N_1}{N_2}T_2$  olduğundan ve  $\theta_2 = \frac{N_1}{N_2}\theta_1$  olduğundan

$$T_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2\ddot{\theta}_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \beta_2\dot{\theta}_1$$

Buradan şu önemli sonuçlar çıkartılabilir:

**Yükten(2 nolu dişliden ), Motora (1 nolu dişliye geçerken)**

- Eylemsizlik:

$$\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2$$

- Viskoz s¼rt¼nme katsayısı

$$\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \beta_2$$

- Açısal yer deęiřtirme

$$\frac{N_1}{N_2}\theta_2$$

- Açısal hız

$$\frac{N_1}{N_2}\omega_2$$

şeklinde deęiřir.

Bu hususlar dikkate alınırşa

$$T(t) = J_{1\text{esdeger}}\ddot{\theta}_1 + \beta_{1\text{esdeger}}\dot{\theta}_1$$

yazılabilir. Burada

$$J_{1\text{esdeger}} = J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2$$

$$\beta_{1\text{esdeger}} = \beta_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \beta_2$$

şeklindedir.

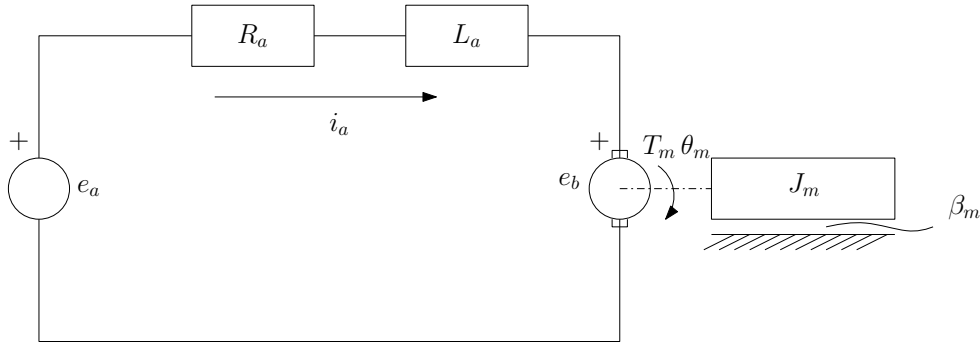
## DC Motorlar

Kolay kontrol edilebilir olmaları, lineere yakın davranışları, çok küçük boyutlarda çok yüksek torklar üretebilen motorların tasarlanabiliyor olması ve hızlı davranışları nedeni ile endüstride giderek artan bir öneme sahip olmaktadır.

Ancak, fırçalı ve komutatörlü olmaları nedeni ile bakım maliyetleri yüksektir.

Günümüzde sabit mıknatıslı (PMDC) motorlar servo uygulamalarda çok sık kullanılmaya başlanmıştır. Bu tip motorlarda uyarım sargısı bulunmamakta, bunun yerine sabit bir alan üreten daimi mıknatıs kullanılmaktadır.

En moda DC motor tipi ise, fırçasız DC (Brushless DC, BLDC) motorlardır. Bu motorlar güç elektroniğindeki hızlı gelişmelere paralel olarak özellikle robot uygulamalarında, bilgisayar sistemlerinde sık kullanılır. Kullanım alanları çoğunlukla yüksek doğruluk, hızlı davranış isteyen uygulamalardır (Printer, hard-disk, Kelime işlemci, robot vs). Zira çok küçük zaman sabitlerine sahip BLDC motorlar üretilebilmektedir. Ancak klasik DC motorlara göre sürücü devreleri karmaşıktır ve AC motorlarınkine benzeyen sürücü yapıları kullanılır.



Genel olarak daimi mıknatıslı bir DC motorda

$$T_m(t) = K_m \phi i_a(t)$$

yazılabilir. Burada  $T_m(t)$  [Nm] cinsinden motorun ürettiği momenti,  $\phi$  Weber cinsinden hava boşluğundaki manyetik akıyı;  $K_m$  ise motor sabitini göstermektedir. Çoğunlukla  $K_m$  sabit olduğundan ve  $\phi$  sabit olduğundan

$$K_i \triangleq K_m \phi$$

yazılabilir ve bu büyüklük moment sabiti olarak adlandırılır. Birimi ise [Nm/A] dir.

Sistem denklemleri ise eşdeğer devreden

$$e_a = R_a i_a + L_a i_a' + e_b$$

$$T_m = K_i i_a$$

$$e_b = K_b \theta_m'$$

$$J_m \theta_m'' = T_m - \beta_m \theta_m'$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $K_b$  Ters Elektromotif Kuvvet (EMK) katsayısıdır ve her zaman hareketi yavaşlatacak yönde kutuplanır.

Bu sistem için durum değişkenleri  $i_a$ ,  $\theta_m$  ve  $\omega_m = \theta_m'$  şeklinde seçilirse durum denklemleri

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ \theta_m \\ \omega_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & 0 & -\frac{K_b}{L_a} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{K_i}{J_m} & -\frac{\beta_m}{J_m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \theta_m \\ \omega_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e_a$$

olarak yazılabilir.

## Sıkıştırılmayan sıvı sistemleri

Sıvı sistemleri kontrol sistemlerinde sıklıkla kullanılır. Bunlardan en önemlisi hidrolik eyleyicilerdir. Çok sık kullanılma nedenlerinin başında az bir eylemsizlik ve düşük ağırlıkla büyük genlikli kuvvetler üretebilmeleridir.

Çoğunlukla uçaklarda ayrodinamik kontrol yüzeylerini hareket ettirme, iş makinaları, robot kolları gibi alanlarda kullanılırlar.

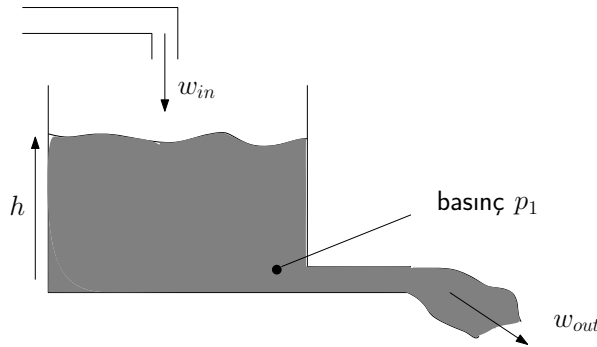
Sıvı sistemler yüksek basınç altında azda olsa sıkışma özelliği gösterirler, ancak sıkışmadıklarını kabul etmek bize çokta birşey kaybettirmeyecektir, zira geri-besleme bu modelleme hatasını kompanze eder.

En temel bağıntı;  $m$  haznedeki akışkan kütlesi,  $w_{in}$  hazneye giren akışkan hızı ve  $w_{out}$  haznedeki çıkan akışkan miktarı olmak üzere

$$\dot{m} = w_{in} - w_{out}$$

şeklindedir.

**Örnek** Aşağıdaki grafikte gösterilen su tankının diferansiyel denklemlerini çıkartalım:



$d$  suyun yoğunluğu,  $h$  su seviyesini,  $A$  taban alanını,  $V$  suyun hacmini gösterirse ve  $d = m/V$  eşitliği kullanılırsa

$$\dot{m} = d\dot{V}$$

olur. Ancak  $V = A \cdot h$  olduğundan

$$\dot{m} = dA\dot{h}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\dot{h} = \frac{1}{dA}(w_{in} - w_{out})$$

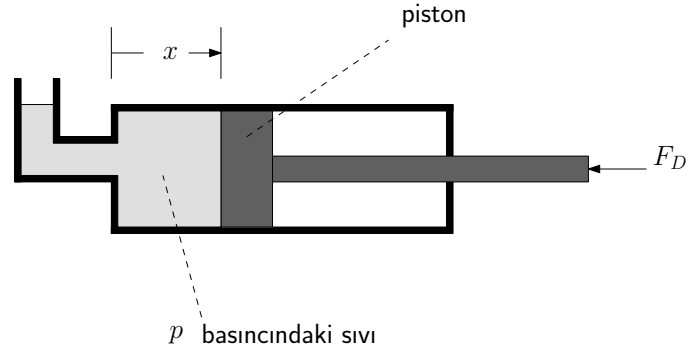
olarak bulunur.

Kuvvet dengesi akışkanlarıçinde geçerlidir.  $p$  sıvı basıncını göstermek üzere,  $f$  kuvveti ve  $A$  sıvının etki ettiği yüzeyi göstererek üzere

$$f = pA$$

ilişkisi vardır.

Şekildeki hidrolik pistonu ele alalım



$M$  pistonun kütlesi ise;  $F_D$  pistona etkiyen kuvvet,  $A$  piston yüzeyinin alanı ise ve  $x$  pistonun yer değiştirmesi ise Newton'u hareket kanunundan

$$M\ddot{x} = Ap - F_D$$

ilişkisi yazılabilir.